

אוסף שאלות בגרות 571 – פונקציה רציונלית

1. בגרות תש"פ, מועד ב'

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - a}{x^3}$, $a \neq 0$ הוא פרמטר.

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
- רשום את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
- הבע באמצעות a את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x . רשום לאילו ערכי a יש נקודות חיתוך.
- הבע באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן. רשום לאילו ערכי a יש נקודות קיצון.

ענה על סעיפים ה-ו עבור $a > 0$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = (f(x+1))^{2020}$.

ו. היעזר בסעיפים הקודמים, וקבע את מספר נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$. נמק.

2. בגרות קיץ תשפ"א, מועד א'

נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x}{(x^2 - 2)^2}$, $g(x) = \frac{x}{(x^2 - 2)^3}$.

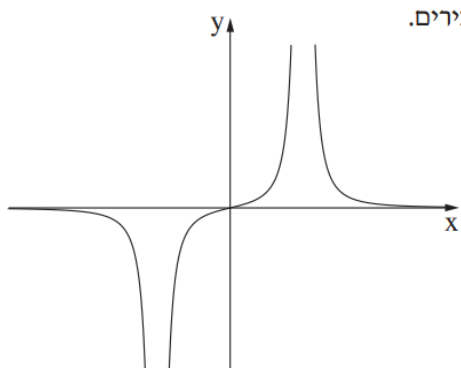
א. ענה על תת-סעיפים (1)-(4) בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון.

(4) הוכח כי הפונקציה אי-זוגית.



ב. (1) הגרף שלפניך מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $g(x)$.

קבע איזו מן הפונקציות הגרף מתאר. נמק את קביעתך.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה האחרת.

נתונה פונקציה $h(x)$ שמקיימת: $h'(x) = f(x)$.

$f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. מה הם תחומי העלייה והירידה של $h(x)$?

ד. חשב את:

$$(1) \int_{-1}^1 f(x) dx. \text{ נמק את תשובתך.}$$

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישרים $x = 1$, $x = -1$.

נתונה הפונקציה $k(x) = f(x) + b$, $b \neq 0$ הוא פרמטר.

ה. האם הפונקציה $k(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק את תשובתך.

3. בגרות חורף תשפ"ב

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{(x^3 - m)^2}$, m הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את תשובותיך באמצעות m , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = (-1)$.

ב. מצא את הערך של m .

הצב בפונקציה $f(x)$ את הערך של m שמצאת, וענה על הסעיפים ג-ה.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = k \cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.

(1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) דרך נקודת הקיצון השמאלית של $g(x)$ מעבירים אנך לציר ה- x .

נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x הוא 1 (השטח שמימין לאנך).

מצא את הערך של k .

4. בגרות קיץ תשפ"ב, מועד א'

נתונה הפונקצייה $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את התשובה.

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

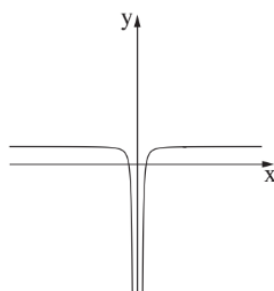
נתונות שתי פונקציות: $f'(x)$ ו- $g(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$, ו- $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$.

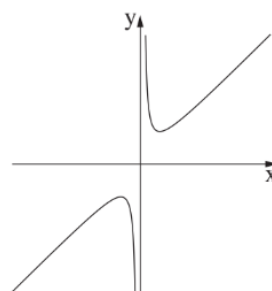
הפונקציות $f'(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ב. כל אחד מן הגרפים III-I שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $g(x)$.

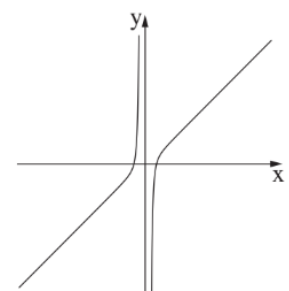
לכל אחת מן הפונקציות כתבו איזה גרף מתאר אותה. נמקו את התשובה.



גרף III



גרף II



גרף I

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{4}$ ו- $x = 4$.

ה. נתון: $1 < a$ הוא פרמטר. חשבו את $\int_{\frac{1}{a}}^a g(x) dx$.

נתונה הפונקצייה $h(x) = \int_1^x f'(t) dt$. נתון כי הפונקצייה $h(x)$ מוגדרת בתחום $1 \leq x$.

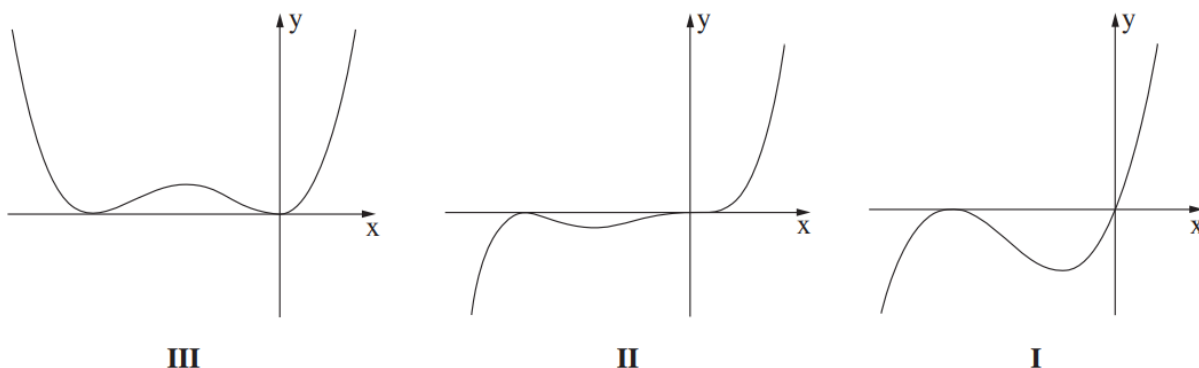
ו. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $h(x)$, וקבעו את סוגה.

5. בגרות חורף תשפ"ג

נתונה הפונקצייה $f(x) = x^n \cdot (x+1)^2$, $n > 1$, הוא מספר טבעי. הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

- מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
- מצאו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה). הבחינו בין n זוגי ובין n אי-זוגי.
- מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות n , אם יש צורך. הבחינו בין n זוגי ובין n אי-זוגי.

לפניכם שלושה גרפים III-I. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור n זוגי, ואחד מהם מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי-זוגי.



- קבעו איזה גרף מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור n זוגי, ואיזה גרף מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי-זוגי. נמקו את קביעותיכם.

נתונה הפונקצייה $g(x) = a \cdot f(x-2)$, a הוא פרמטר חיובי.

נסמן ב- T את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה $g(x)$ ובין ציר ה- x .

- הביעו באמצעות a ו- T את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה $f(x)$ ובין ציר ה- x . נמקו את תשובתכם.

6. בגרות קיץ תשפ"ג, מועד א'

נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2a - x^2}{x}$, המוגדרת עבור $x \neq 0$. a הוא פרמטר חיובי.

- הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

- מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים, אם יש כאלה.
- הראו שהפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה אי-זוגית.
- מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.
- מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$, אם יש כאלה.
- מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה ($\cup$) ואת תחום הקעירות כלפי מטה ($\cap$) של הפונקצייה $f(x)$.

- סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה גם הפונקצייה $g(x) = |f(x)| - b$, b הוא פרמטר חיובי.

הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

- סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ היא: $(-3, 2)$.

- מצאו את הערכים של a ו- b .

נתונה גם הפונקצייה $s(x) = \int_1^x g(t) dt$, המוגדרת בתחום $1 < x$.

ה. מהו סוג נקודת הקיצון של $s(x)$? נמקו את תשובתכם.

7. בגרות קיץ תשפ"ג, מועד ב'

נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{(x - 4)^2}$, $0 < a < 4$ הוא פרמטר.

א. ענו על התת-סעיפים (1)–(5). הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{x^2}{(x - 4)^2}$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה $f(x)$.

ב. (1) הוכיחו כי גרף הפונקצייה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, על ידי הישר $x = 1$ ועל ידי ציר ה- y .

8. בגרות קיץ תשפ"ד, מועד א'

נתונה הפונקצייה: $f(x) = \frac{4x}{(x^2 - a)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על סעיפים א–ה. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקצייה המקיימת $g'(x) = f(x)$. גרף הפונקצייה $g(x)$ עובר בנקודה $(0, 0)$.

הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ג. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקצייה $g(x)$.

ד. (1) מצאו פונקצייה $g(x)$ המקיימת תנאים אלו.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ שמצאתם בתת-סעיף ד(1).

ה. $h(x)$ היא פונקצייה המוגדרת כך: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ה. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקצייה $h(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות של הפונקצייה $h(x)$.

9. בגרות קיץ תשפ"ד, מועד ב'

נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x-1}{(x-a)^3}$, המוגדרת בתחום $x \neq a$, הוא פרמטר שונה מ-0.

א. ענו על התת-סעיפים (1)–(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y .

ב. מצאו עבור אילו ערכים של a יש לפונקצייה $f(x)$ נקודת קיצון שנמצאת

משמאל לאסימפטוטה האנכית לציר ה- x , וקבעו את סוגה.

הגרפים 1–4 שבסוף השאלה מתארים את הפונקצייה $f(x)$ בעבור ערכים שונים של a .

ג. התאימו לכל אחד מן הערכים IV–I של a את הגרף המתאים לו, ונמקו את תשובותיכם.

I. $a = -1$ II. $a = 0.5$ III. $a = 1$ IV. $a = 2$

נתונה הפונקצייה $g(x)$, המקיימת $g(x) = f(x) - b$ בעבור הערך של a המתאים לגרף 2.

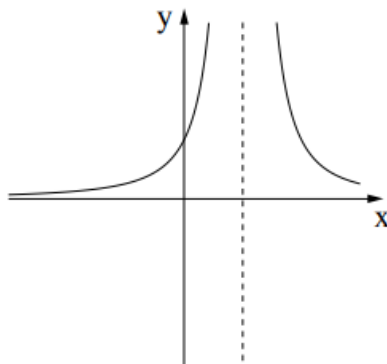
b הוא פרמטר חיובי.

אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x היא $(t, 0)$, $1 < t < 5$.

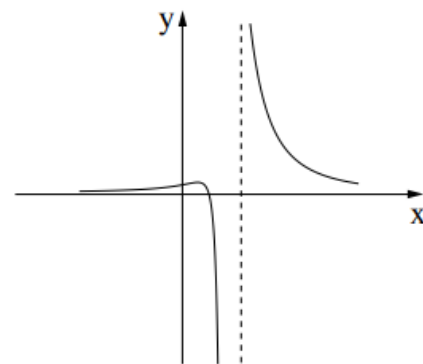
נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית של הפונקצייה $g(x)$,

על ידי הישר $x = t$ ועל ידי הישר $x = 5$ הוא 1.75.

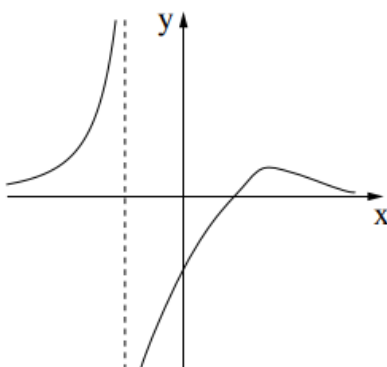
ד. מצאו את הערך של b .



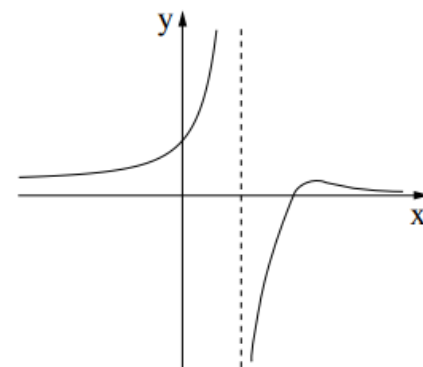
2



1



4



3

10. חורף תשפ"ה

נתון כי $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - a^2)^3}$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$. a הוא פרמטר חיובי.

הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות באותו התחום.

בסעיפים א-ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$.

ג. מצאו פונקצייה $f(x)$ המקיימת תנאים אלה.

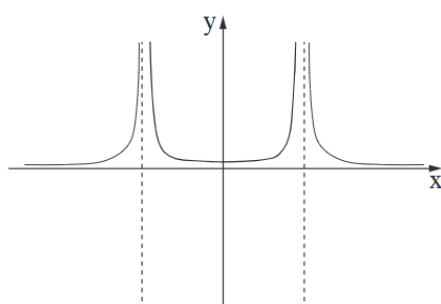
נתונות הפונקצייה $g(x) = \frac{x-a}{(x^2-a^2)^2}$ והפונקצייה $h(x) = \frac{(x-a)^2}{(x^2-a^2)^2}$.

הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו התחום.

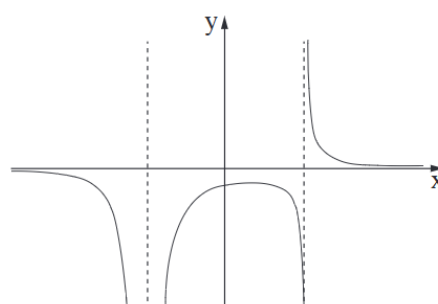
ד. התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$ גרף אפשרי המייצג אותה מבין הגרפים I-IV שבסוף השאלה. נמקו את תשובותיכם.

נתון כי לפונקצייה $h(x-6)$ יש אסימפטוטה שמשוואתה $x = 0.25a$.

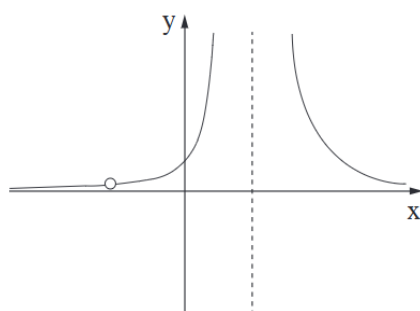
ה. מצאו את הערך של a .



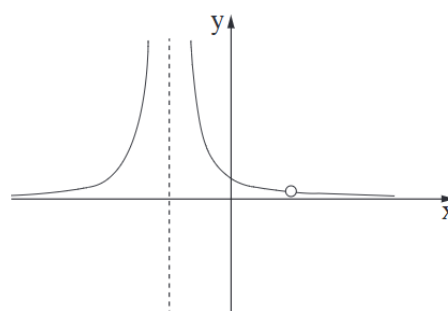
II



I



IV



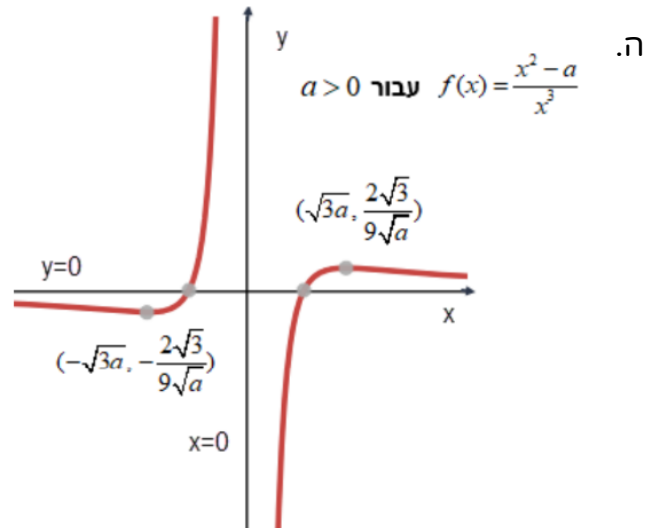
III

1. בגרות תש"פ, מועד ב'

א. $x \neq 0$ ב. $x = 0, y = 0$ ג. עבור $a > 0$ $(\sqrt{a}, 0)$, $(-\sqrt{a}, 0)$ עבור $a < 0$ אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x

ד. עבור $a > 0$: $(\sqrt{3a}, \frac{2\sqrt{3}}{9\sqrt{a}})$ מקסימום, $(-\sqrt{3a}, -\frac{2\sqrt{3}}{9\sqrt{a}})$ מינימום.

$a < 0$ הנגזרת שלילית, בתחום ההגדרה, ואין נקודות קיצון (ירידה $x > 0$ או $x < 0$)



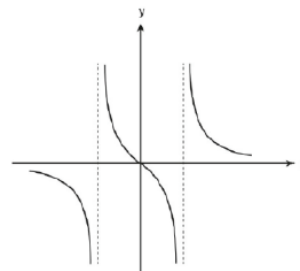
א. 4 נקודות קיצון, 2 מינימום ו- 2 מקסימום.

2. בגרות קיץ תשפ"א, מועד א'

א. (1) $f(x) : x \neq \pm\sqrt{2}$, $g(x) : x \neq \pm\sqrt{2}$

(2) $f(x)$ ו- $g(x) : x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, y = 0$ (3) הוכחה (4) הוכחה.

ב. (1) $f(x)$ (2)



ג. עליה: $x < -\sqrt{2}$ או $-\sqrt{2} < x < 0$, ירידה: $0 < x < \sqrt{2}$ או $\sqrt{2} < x$

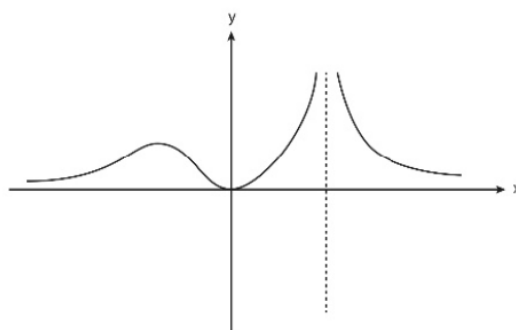
ד. (1) 0 (2) $\frac{1}{2}$ ה. לא זוגית ולא אי זוגית.

3. בנרות חורף תשפ"ב

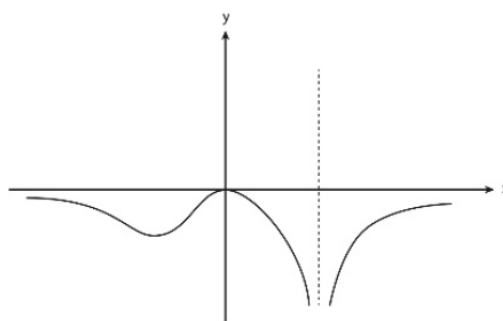
א. (1) $x \neq \sqrt[3]{m}$ (2) $x = \sqrt[3]{m}$, $y = 0$. ב. $m = 2$.

ג. $(0,0)$ מינימום , $\left(-1, \frac{1}{9}\right)$ מקסימום.

ד.



ה. (1)



(2) $k = -18$.

4. בנרות קיץ תשפ"ב, מועד א'

א. (1) $x \neq 0$ (2) אי זוגית.

(3) תחומי עלייה: $1 < x$, $1 < x$

תחומי ירידה: $0 < x < 1$, $-1 < x < 0$.

ב. $f(x)$ - גרף II , $f'(x)$ - גרף III , $g(x)$ - גרף I . ג. $(-1,0)$, $(1,0)$.

ד. 56.25 . ה. 0 . ו. מינימום: $(1,0)$.

5. בגרות חורף תשפ"ג

א. $(0,0)$, $(-1,0)$.

ב. עבור n זוגי: תחום חיוביות: $0 < x$ או $-1 < x < 0$ או $x < -1$;

תחום שליליות: אין .

עבור n אי-זוגי: תחום חיוביות: $0 < x$;

תחום שליליות: $-1 < x < 0$ או $x < -1$.

ג. עבור n זוגי: $x = 0$ מינימום, $x = -1$ מינימום, $x = -\frac{n}{n+2}$ מקסימום .

עבור n אי-זוגי: $x = -1$ מקסימום, $x = -\frac{n}{n+2}$ מינימום .

ד. עבור n זוגי: גרף III עבור $n > 1$ אי-זוגי: גרף II . ה. $\frac{T}{a}$.

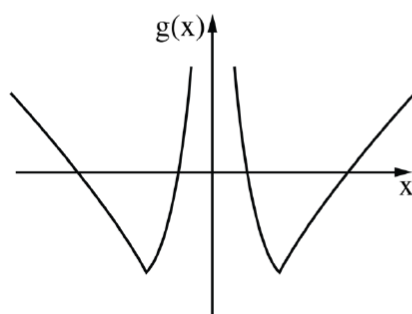
6. בגרות קיץ תשפ"ג, מועד א'

א. (1) $x = 0$. (2) הוכחה. (3) $(\sqrt{2a}, 0)$, $(-\sqrt{2a}, 0)$.

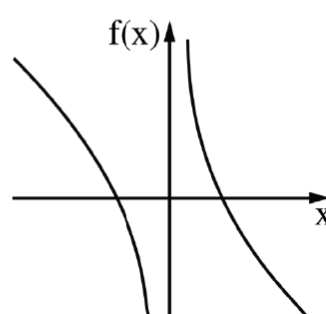
(4) תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה: $x < 0$ או $x > 0$.

(5) קעירות כלפי מעלה ($\cup$): $x > 0$, קעירות כלפי מטה ($\cap$): $x < 0$.

ג.

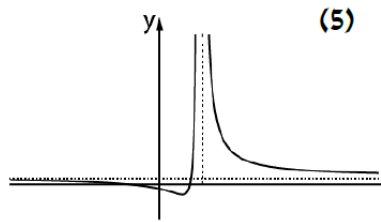


ב.



ד. $a = 2$, $b = 3$. ה. מינימום.

7. בגרות קיץ תשפ"ג, מועד ב'



א. (1) $x \neq 4$ (2) $y = 1$, $x = 4$

(3) $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, -\frac{a^2}{16})$

(4) $x = \frac{a^2}{4}$, מינימום.

ב. (1). הוכחה. (2) $\frac{a^2}{12}$

8. בגרות קיץ תשפ"ד, מועד א'

9. בגרות קיץ תשפ"ד, מועד ב'

10. חורף תשפ"ה (תשובות: אתר מלומד)

$x \neq \pm a$	א.
תחומי העלייה:	ב.
$x < -a$, $0 < x < a$	
תחומי הירידה:	
$-a < x < 0$, $x > a$	
$f(x) = \frac{1}{(x^2 - a^2)^2}$	ג.
$\Pi - f(x)$	ד.
$I - g(x)$	
$\text{III} - h(x)$	
$a = 4.8$	ה.