

1. בגרות קיץ תשפ"א, מועד א'

במשולש ABC אורך הצלע BC הוא a.

נתון: $\angle BAC = \alpha$ (ברדיאנים).

נסמן: $\angle ABC = x$ ($0 < x < \pi - \alpha$).

א. הבע באמצעות x, a ו- α את היקף המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות α את ערך ה-x שבעבורו היקף המשולש ABC הוא מקסימלי.

ג. הסבר מדוע מתקיים המשפט הזה: מכל המשולשים בעלי צלע נתונה וזווית מולה נתונה, המשולש בעל ההיקף המקסימלי הוא משולש שווה שוקיים.

2. בגרות קיץ תשפ"א, מועד נבצרים

נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$, $g(x) = \frac{x-3}{x-1}$.

ענה על סעיף א בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

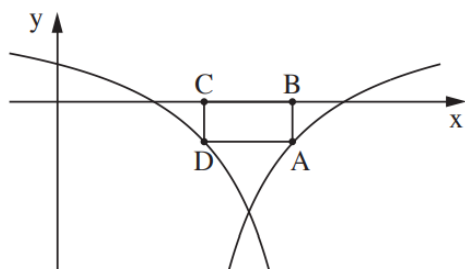
א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

בסרטוט שלפניך מתואר חלק מן הגרף של הפונקציה $f(x)$, חלק מן הגרף של הפונקציה $g(x)$, ומלבן החסום ביניהם ובין ציר ה-x.

צלע BC של המלבן מונחת על ציר ה-x, והצלע הנגדית AD, מחברת

בין נקודה על הגרף של $f(x)$ ובין נקודה על הגרף של $g(x)$, כמתואר בסרטוט.



נסמן ב-t את שיעור ה-x של הנקודה A.

ב. קבע מהו תחום הערכים האפשרי של t.

ג. (1) הבע באמצעות t את אורך הצלע AB.

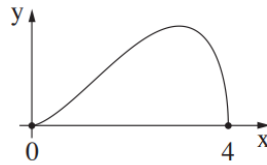
(2) הוכח ששיעור ה-x של הנקודה D הוא $4 - t$.

(3) הבע באמצעות t את שטח המלבן ABCD.

ד. מצא את t שבעבורו שטח המלבן ABCD הוא מקסימלי.

3. בגרות קיץ תשפ"א, מועד ב'

בסרטוט שלפניך מוצגת הפונקציה $f(x) = \sqrt{a \cdot x^4 + b \cdot x^3}$.
נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $0 \leq x \leq 4$.



א. (1) הוכח כי $b = -4 \cdot a$.

(2) לפניך שתי טענות I-II. רק אחת מהן נכונה. קבע מהי הטענה הנכונה, ונמק את קביעתך.

I. $a > 0, b < 0$

II. $a < 0, b > 0$

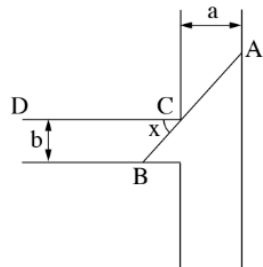
הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $(f(x))^2$ המוגדרת גם היא בתחום $0 \leq x \leq 4$. מנקודה P מעבירים ישר המאונך לציר ה- x . M היא נקודת החיתוך של האנך עם ציר ה- x , O היא ראשית הצירים.

ב. מהו שיעור ה- x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

ג. בעבור שיעור ה- x שמצאת בסעיף ב, בטא באמצעות a את השטח המקסימלי של המשולש PMO.

ד. אם ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה P נמצא בתחום שבו הפונקציה $(f(x))^2$ אינה יורדת, מהו שיעור ה- x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

4. בגרות חורף תשפ"ב



תעלת מים ראשית ברוחב קבוע a מחוברת בניצב לתעלה משנית ברוחב קבוע b .

הנקודה C היא נקודת המפגש בין דופן של התעלה הראשית

ובין דופן של התעלה המשנית (ראה סרטוט).

מהנדקת מתכננת סכר ישר, שיצא מן הנקודה A שבדופן התעלה הראשית,

יעבור דרך הנקודה C ויגיע עד הנקודה B שבדופן התעלה המשנית.

הסכר ייצור זווית שגודלה x עם הדופן CD של התעלה המשנית, כמתואר בסרטוט.

א. הבע באמצעות a, b ו- x את אורך הסכר AB.

נתון כי $a = 2b$.

ב. מצא את x שבעבורו אורך הסכר AB יהיה מינימלי.

ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8. מצא את b .

5. בגרות חורף תשפ"ב, נבצרים

חותכים חוט שאורכו k לשני חלקים.

מחלק אחד של החוט יוצרים משולש שווה-צלעות ומן החלק האחר יוצרים מעגל.

נסמן ב- x את אורך צלע המשולש.

א. הבע באמצעות k את תחום ההגדרה של x .

ב. הבע באמצעות k את אורך צלע המשולש, שעבורו סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי.

ג. הראה כי כאשר סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי, אי אפשר לחסום את המשולש שהתקבל במעגל שהתקבל.

6. בגרות קיץ תשפ"ב, מועד א'

נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, והנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- x .

נתון כי שיעור ה- x של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה- x של נקודות החיתוך של הפונקצייה $f(x)$ עם הפונקצייה $g(x)$. נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A. t הוא פרמטר.

ב. הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB.

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB.

ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא מקסימלי? נמקו את התשובה.

7. בגרות קיץ תשפ"ב, מועד ב'

נתונה הפונקצייה $f(x) = x^3 + 4x^2$, המוגדרת לכל x .

הנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע השני (ראו סרטוט).

מן הנקודה B מעבירים משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.

המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה C.

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה B.

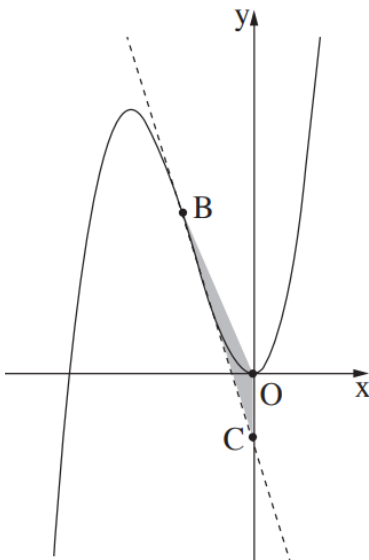
א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה B.

ידוע כי הנקודה C נמצאת מתחת לציר ה- x .

ב. מהו תחום הערכים של t ?

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OBC.



8. בגרות חורף תשפ"ג

לפניכם שלוש פונקציות שלכל אחת מהן יש שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x + 2)}, \quad h(x) = \frac{x^3}{x(x + 2)}, \quad k(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2(x + 2)}$$

ידוע כי לאחת משלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

א. מבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקצייה מקיימת את כל התכונות האלה. נמקו את קביעתכם.

ענו על סעיפים ב–ד עבור הפונקצייה שקבעתם בסעיף א.

ב. (1) מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ואת המשוואה של האסימפטוטה האנכית של הפונקצייה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה עם הצירים.

נתון כי לפונקצייה זו אין נקודות קיצון.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה.

נסמן נקודה A על גרף הפונקצייה, שעבורה $x = t$, $-1 < t < 1$.

מן הנקודה A מעבירים שני ישרים, האחד מאונך לציר ה- x והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקצייה,

כך שנוצר מלבן על ידי שני הישרים, על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה- x .

ד. מצאו את ערכו של t שבעבורו היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי. תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

9. בגרות קיץ תשפ"ג, מועד א'

נתון מעוין $ABCD$. נקודה E היא אמצע הצלע BC .

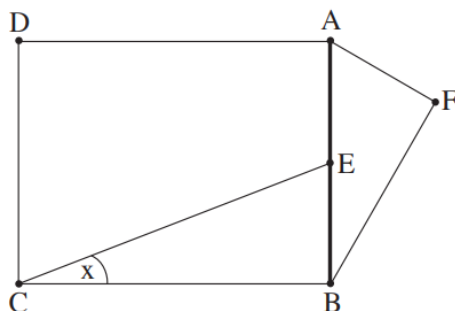
נסמן: $\angle ECD = x$.

נתון: שטח המשולש ECD הוא 18.

א. הביעו באמצעות x את אורך צלע המעוין.

ב. חשבו את האורך המינימלי של הקטע DE .

10. בגרות קיץ תשפ"ג, מועד ב'



הנקודה E היא אמצע הקטע AB .

על הקטע AB בנוים מלבן $ABCD$

ומשולש ישר זווית AFB , $\angle AFB = 90^\circ$, כמתואר בסרטוט.

נתון: $\angle ECB = x$, $\angle FAB = 2x$.

נסמן את אורך הקטע AB ב- h .

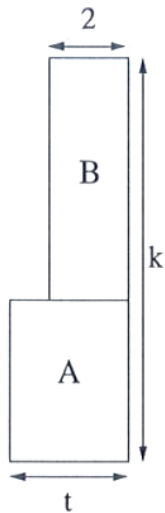
א. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור x ? הסבירו את תשובתכם.

ב. הביעו באמצעות x ו- h את ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF .

ג. מצאו את הערך של x שבעבורו ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF הוא מינימלי.

ד. בעבור הערך של x שמצאתם בסעיף ג, מצאו את היחס בין שטח המלבן $ABCD$ לשטח המשולש AFB .

11. בגרות חורף תשפ"ד



נתונות שתי גינות מלבניות הצמודות זו לזו, גינה A וגינה B.

הרוחב של גינה A הוא t מטרים.

הרוחב של גינה B הוא 2 מטרים ושטחה הוא $2t + 2$ מ"ר, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

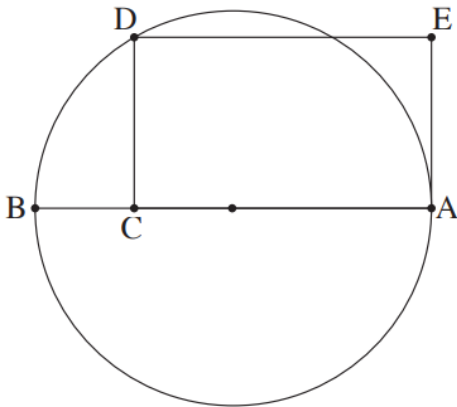
האורך הכולל של שתי הגינות הוא k מטרים. k הוא קבוע.

א. הביעו באמצעות k ו- t את שטח הגינה A.

ב. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה B ובין שטח הגינה A הוא מינימלי.

ג. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה A ובין שטח הגינה B הוא מקסימלי. נמקו את תשובתכם.

12. בגרות קיץ תשפ"ד, מועד א'



הקטע AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R.

מסמנים על הקוטר נקודה C ועל המעגל מסמנים נקודה D,

כך שהקטע CD מאונך לקטע AB. הקטע AC גדול מ-R.

דרך הנקודה D מעבירים ישר שמקביל לקוטר AB.

דרך הנקודה A מעבירים משיק למעגל.

הישר המקביל והמשיק נחתכים בנקודה E.

נסמן: $AC = x$.

א. הביעו באמצעות R את הערך של x שבעבורו שטח המלבן ACDE מקסימלי.

הנקודה F נמצאת על הצלע DE.

ב. הביעו באמצעות R את סכום השטחים המקסימלי של המשולשים CDF ו-AFE.

13. בגרות קיץ תשפ"ד, מועד ב'

נתונה הפונקצייה $f(x) = \sqrt{x}$, המוגדרת בתחום $x \geq 0$, ונתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{16}{x^2 + 3}$, המוגדרת לכל x .

א. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

בנקודה $C(t, 0)$ מעבירים אנך לציר ה- x , $t > 0$.

האנך חותך את גרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של הפונקצייה $g(x)$ בנקודה B .

ב. הביעו באמצעות t את מכפלת אורכי הקטעים AC ו- BC .

ג. הוכיחו כי מכפלת אורכי הקטעים AC ו- BC מקסימלית כאשר הנקודה B היא נקודת פיתול של

הפונקצייה $g(x)$.

נתונה הפונקצייה $k(x) = \frac{8\sqrt{x-4}}{(x-4)^2 + 3}$, המוגדרת בתחום $x \geq 4$.

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים של השאלה. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקצייה $k(x)$, וקבעו את סוגה.

נמקו את תשובתכם.

14. בגרות חורף תשפ"ה

נתונה הפונקצייה $f(x) = x\sqrt{21-x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $f(x)$.

ידוע כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון פנימית אחת ואין לה נקודות פיתול.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקצייה $f(x)$.

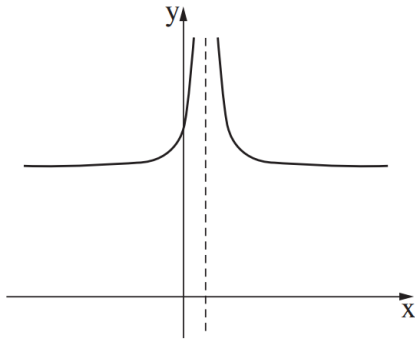
הנקודה C היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם החלק החיובי של ציר ה- x .

מן הנקודה A העבירו שני אנכים:

אנך אחד לציר ה- x החותך אותו בנקודה B , ואנך נוסף לישר $x = 21$ החותך אותו בנקודה D .

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן $ABCD$ הוא מקסימלי.

15. בגרות קיץ תשפ"ה



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + 6$.

הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x \neq 1$. a הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, ושיעור ה- x שלה הוא 2.

דרך הנקודה C העבירו משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. הביעו באמצעות a את משוואת המשיק.

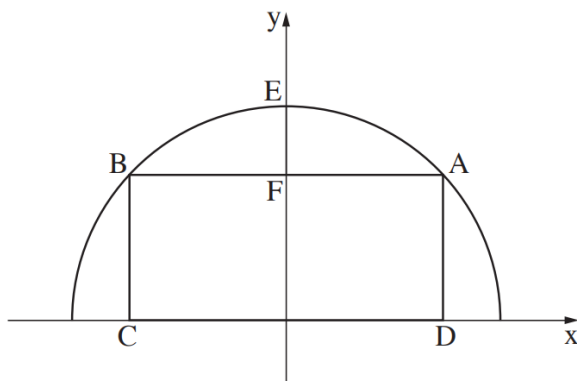
המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת הישר $x = 1$ בנקודה B .

D היא נקודה ששיעוריה הם $(1, 0)$.

ג. הביעו באמצעות a את שטח המשולש ADB .

ד. מצאו את הערך של a שבעבורו שטח המשולש ADB הוא מינימלי.

16. בגרות קיץ תשפ"ה - מועד ב



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

R הוא פרמטר חיובי.

הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-R \leq x \leq R$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע הראשון.

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה- x

וחותך את גרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה נוספת B .

הנקודות C ו- D נמצאות על ציר ה- x כך שנוצר מלבן $ABCD$.

הנקודה F היא נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- y .

הנקודה E היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y .

נתון ריבוע שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע EF .

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A .

א. (1) הביעו באמצעות R ו- t את אורך הקטע EF .

(2) הביעו באמצעות R ו- t את היקף המלבן $ABCD$.

ב. הביעו באמצעות R את הערך של t שבעבורו ההפרש בין היקף המלבן $ABCD$ לבין היקף הריבוע הוא מקסימלי.

תשובות:

1. בגרות קיץ תשפ"ה, מועד א'

א. $a + \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin x + \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin(\alpha + x)$ ב. $\frac{\pi - a}{2}$ ג. הוכחה

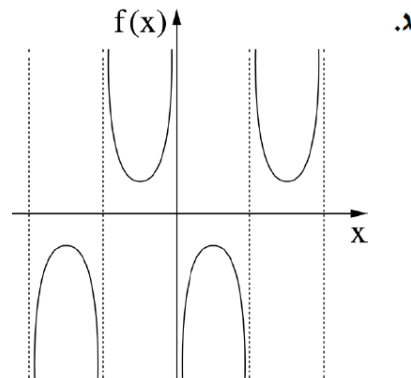
2. בגרות קיץ תשפ"א, מועד נבצרים

א. (1) $f(x) : x \neq 3$, $g(x) : x \neq 1$.

(2) $f(x) : (1, 0)$, $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $x \neq \pi$, $x \neq -\pi$, $-2\pi < x < 2\pi$ (1) א.

ב. $2 < t < 3$. (2) $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, $x = -2\pi$, $x = -\pi$ (3) אי-זוגית .

ג. (1) $\frac{3-t}{t-1}$ (2) הוכ' ב. (1) אין נקודות חיתוך עם הצירים. (2) $(\frac{\pi}{2}, -2)$ מקסימום , $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ מינימום.



3. בגרות קיץ תשפ"א

א. (1) הוכחה (2) II

4. בגרות חורף תשפ"א

א. $B = \frac{b}{\sin x} + \frac{a}{\cos x}$

ד. הוכחה. ה. 0.182 .

5. בגרות חורף תשפ"ב, נבצרים

א. $0 < x < \frac{K}{3}$. ב. $0.21K$. ג. הוכחה.

6. בגרות קיץ תשפ"ב, מועד א'

א. (1) תחום של $f(x) : x$ כל , תחום של $g(x) : 0 \leq x$ (2) $(0, 0)$, $(1, 1)$.

ב. $AB = t - t^2$. ג. $S_{OAB} = \frac{128}{3125} \approx 0.04096$. ד. לא .

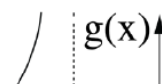
7. בגרות קיץ תשפ"ב, מועד ב'

א. $y = (3t^2 + 8t)x - 2t^3 - 4t^2$. ב. $-2 < t < 0$. ג. $S_{\Delta OBC} = \frac{27}{16}$.

8. בגרות חורף תשפ"ג

א. $g(x)$. ב. (1) $x = -2$, $y = 1$ (2) $(0, -0.5)$, $(1, 0)$.

ג.



9. בגרות קיץ תשפ"ג, מועד א'

א. $\frac{10}{\sqrt{\sin x}}$

ב. $5\sqrt{3} = 8.66$

10. בגרות קיץ תשפ"ג, מועד ב'

א. $0 < x < 45^\circ$. ב. $\frac{0.5h}{\sin x} - h \cdot \cos(2x)$. ג. $x = 30^\circ$. ד. 4 .

11. בגרות חורף תשפ"ד

א. $S_A = -t^2 + (k-1)t$

ב. $t_{\min} = \sqrt{k} - 1$

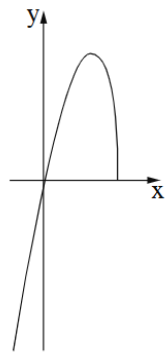
ג. $t_{\max} = \sqrt{k} - 1$

12. בגרות קיץ תשפ"ד, מועד א'

$x = 1.5R$ $\frac{3\sqrt{3}}{8}R$

13. בגרות קיץ תשפ"ד, מועד ב'

14. בגרות חורף תשפ"ה

$x \leq 21$	א. (1)
תחום חיוביות:	(2)
$0 < x < 21$	
תחום שליליות:	
$x < 0$	ב.
	
$x =$	5
$y = -$; $A(12, 36)$	ג.
$\frac{9(a+3)^2}{4a}$	ג.
$a = 3$	ד.

15. בגרות קיץ תשפ"ה

$$x = 1, y = 9$$

$$y = -2ax + 5a + 9$$

$$\frac{9(a+3)^2}{4a}$$

$$a = 3$$

16. בגרות קיץ תשפ"ה מועד ב

$EF = R - \sqrt{R^2 - t^2}$	א. (1)
$2\sqrt{R^2 - t^2} + 4t$	
$\frac{2R}{\sqrt{13}}$	
	ב. (2)

תשובות סופיות - חוברת בגרונות של יואל גבע

- משרד החינוך

פתרונות מלאים – עופר ילין