

אוסף שאלות בגרות 571 – שאלות קצרות: אינדוקציה

קיץ תשפ"ה, מועד א

א. (1) הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$$

(2) חשבו את הערך של הסכום: $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + 90^2$.

קיץ תשפ"ה, מועד ב

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots + \frac{4n-2}{3^n} = 2 - \frac{2n+2}{3^n}$$

חורף תשפ"ה

1. א. נתון כי השוויון $8 + 24 + 48 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+a)(n+4)}{6}$ מתקיים בעבור $n = 2$.

a הוא פרמטר.

(1) מצאו את הערך של a.

(2) בעבור הערך של a שמצאתם, הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי זוגי.

קיץ תשפ"ד, מועד ב'

2. א. (1) הוכיחו באינדוקציה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(2) האם הביטוי $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$ שווה ל- $\frac{n+1}{n}$ בעבור כל n טבעי? נמקו את תשובתכם.

קיץ תשפ"ד, מועד א'

3. א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי:

$$4 + 13 + \dots + \frac{5n^2 + 3n}{2} = \frac{n(n+1)(5n+7)}{6}$$

חורף תשפ"ד

4. א. הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת שלכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$48 + 144 + 288 + \dots + 6n(n+2) = n(n+2)(n+4)$$

קיץ תשפ"ג, מועד ב'

5. בעבור כל n טבעי הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת כי מתקיים: $\frac{A}{2} + \frac{A}{2^2} + \dots + \frac{A}{2^n} = A\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
 A הוא פרמטר.

קיץ תשפ"ג, מועד א'

6. נתונות שתי סדרות המוגדרות לכל n טבעי: $a_n = 2n - 1$, $b_n = 2^n$.

$$T_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

(1) הוכיחו כי:

$$T_k = (2k - 3) \cdot 2^{k+1} \quad \text{אם בעבור } k \text{ טבעי כלשהו מתקיים:}$$

$$T_{k+1} = (2k - 1) \cdot 2^{k+2} \quad \text{אז מתקיים:}$$

$$T_n = (2n - 3) \cdot 2^{n+1} \quad \text{לפניכם טענה: לכל } n \text{ טבעי מתקיים:}$$

(2) הסבירו מדוע טענה זו אינה נכונה.

חורף תשפ"ג

7. א. ידוע כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 12 + \dots + (3n - 2)(5n - 3) = n(5n^2 - 2n - 1)$$

$$(1) \quad 7 \cdot 12 + 10 \cdot 17 + \dots + 58 \cdot 97 \quad \text{חשבו את הערך של הביטוי:}$$

ידוע כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 12 + \dots + (3n - 2)(5n - 3) + (3n + 1)(5n + 2) = (n + 1)(5n^2 + 8n + C)$$

(2) מצאו את הערך של C .

תשפ"ב, מועד ב'

א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי בעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$$

תשפ"ב, מועד א'

9. א. (1) בעבור כל n טבעי, הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת כי הביטוי $4^n - 1$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

(2) נתון: p הוא מספר שלם.

כתבו דוגמה לערך של p שבעבורו הביטוי $4^{n+1} + p$ מתחלק ב-12 ללא שארית, לכל n טבעי.

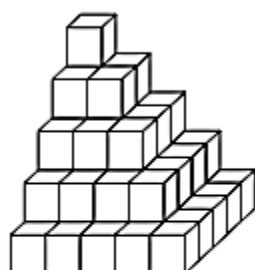
תשפ"ב, חורף, מועד נבצרים

10. ב. נתון מגדל קוביות ובו 5 קומות (ראה ציור).

הקומה התחתונה בנויה מ-25 קוביות המסודרות בצורת ריבוע.

הקומה שמעליה בנויה מ-16 קוביות המסודרות בצורת ריבוע.

וכך הלאה עד לקומה העליונה שבה יש קובייה אחת.



(1) כמה קוביות סך הכול דרושות כדי לבנות באותו אופן מגדל שבו 7 קומות?

(2) נתון מגדל ובו 10 קומות הבנוי באותו אופן שבו בנוי המגדל המתואר בתחילת סעיף ב.

כמה קוביות צריך להוסיף למגדל זה, כדי שיהיו בו 100 קומות הבנויות באותו אופן? פרט את חישוביך.

תוכל להיעזר בנוסחה (לכל n טבעי): $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6} (n+1)(2n+1)$.

תשפ"א, יוני נבצרים

11. ב. בחוברת לימוד ישנה ומוכתמת נמצא התרגיל הבא:

הוכח כי לכל n טבעי מתקיים השוויון הבא:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{(2n-1)3^n + 1}{4}$$

אחד המספרים באגף ימין של התרגיל נמחק.

(1) מצא את המספר שנמחק.

(2) הצב את המספר שמצאת והוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, כי השוויון מתקיים

לכל n טבעי.

תשפ"א, מועד א'

12. ב. לפניך שתי טענות אשר רק אחת מהן נכונה לכל n טבעי.
קבע איזו מהטענות נכונה.
הוכח את הטענה הנכונה לכל n טבעי באינדוקציה (או בדרך אחרת).

$$I. \quad \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2n+4}$$

$$II. \quad \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{3(n+1)}$$

תשפ"א, חורף

13. ב. הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת שהביטוי $n^3 - n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

תש"פ, מועד א'

14. א. הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת שהביטוי $5^n - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.

תש"פ, מועד ב'

15. ב. הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

דוגמה מספר 1 לשאלון 581

$$16. \text{ בסדרה מתקיים: } a_{n+1} = a_n + 3n + 3n^2$$

(1) הוכח:

אם ידוע כי עבור k טבעי מסוים מתקיים: $a_k = k^3 - k + 2$ אז

$$a_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1) + 2$$

(2) האם מתשובתך לסעיף א(1) נובע:

שלכל n טבעי בסדרה, בהכרח מתקיים: $a_n = n^3 - n + 2$?

דוגמה לשאלון 581

17.

לפניך טענה:

אם ל- n טבעי מסוים $n^3 - n$ מתחלק ב-3 ללא שארית, אז גם $(n+1)^3 - (n+1)$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

דן אומר:

הטענה שלמעלה מספיקה כדי להוכיח שהביטוי $n^3 - n$ מתחלק ב-3 ללא שארית לכל n טבעי. האם דן צודק? נמק את תשובתך.

דוגמה מספר 2 לשאלון 581

18. נתונות שתי סדרות: $a_n = n^2 + 2n$, $b_{n+1} = b_n + 2n + 3$, $b_1 = 3$.

(1) הראה כי $a_1 = b_1$. האם $a_2 = b_2$? האם $a_4 = b_4$?

(2) האם הסדרות זהות? אם לא, תן דוגמה.

אם כן, הוכח כי לכל n טבעי מתקיים $a_n = b_n$.

תשובות:

1. חורף תשפ"ה

$a = 2$

7. חורף תשפ"ג

א. 1. 39,150 2. 2

9. תשפ"ב, מועד א'

ב. לדוגמה, עבור $p = 8$, הביטוי $4^{n+1} + p$ מתחלק ב-12 ללא שארית, לכל n טבעי.

10. בגרות חורף תשפ"ב, נבצרים

1. נדרשות 140 קוביות סך הכול, כדי לבנות באותו אופן מגדל שבו 7 קומות.
2. יש להוסיף 337,965 קוביות למגדל בן 10 קומות, כדי שיהיו בו 100 קומות.

11. בגרות קיץ תשפ"א, יוני, נבצרים

המספר שנמחק הוא 1 .

12. תשפ"א, מועד א'

- ב. 1. טענה נכונה
2. טענה אינה נכונה

פתרונות מלאים של עופר ילין