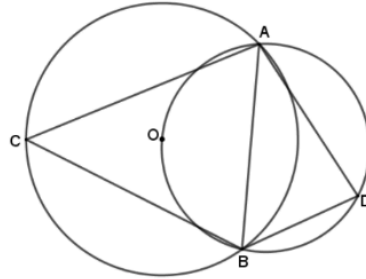


אוסף שאלות בגרות 571 – טריגונומטריה במישור

1. בגרות תש"פ, מועד א'

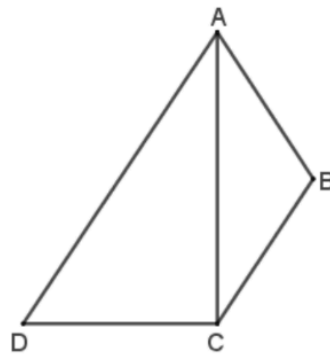
שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו- B . הנקודה O היא מרכז המעגל הגדול שרדיוסו R . המעגל הקטן, שרדיוסו r , עובר דרך הנקודה O . הנקודה D נמצאת על המעגל הקטן, והנקודה C נמצאת על המעגל הגדול (ראה ציור).



- נתון: $\angle ADB = 2\alpha$.
- הבע באמצעות α את $\angle ACB$.
 - הוכח שמתקיים: $R = 2r \sin \alpha$.
 - נתון: $\alpha = 40^\circ$, $r = 10$ ס"מ, $AD = 1.5BD$, $CA = CB$. חשב את היקף המרובע $ACBD$.

2. בגרות תש"פ, מועד ב'

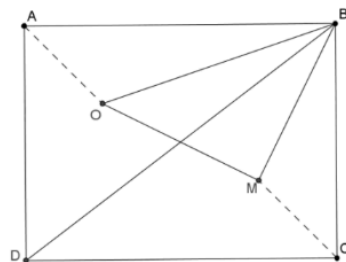
נתון משולש ישר זווית ACD ($\angle ACD = 90^\circ$). העבירו קטע CB כך שהתקבל טרפז $ABCD$ ($BC \parallel AD$) (ראה ציור). נתון: $BC = k$, $AD = 2k$, $\angle ADC = \alpha$.



- הבע את שוקי הטרפז $ABCD$ באמצעות k ו- α (אם צריך).
- הנקודה E נמצאת על הצלע AD כך שמתקיים: $CE \parallel BA$. שטח המרובע $ABCE$ הוא $\frac{\sqrt{3}}{2} k^2$.
- מצא את α .
- הבע באמצעות k את אורך הקטע BE , עבור הזווית α הקטנה מבין השתיים שמצאת.

3. בגרות תשפ"א, מועד חורף

במלבן $ABCD$ הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABD והנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש BDC .



- נסמן: $AB = a$, $BC = b$, $\angle ABD = \alpha$.
- הבע את AO ואת BO באמצעות a ו- α .
 - הראה כי $\angle OBM = 45^\circ$.
 - נתון: $AB = 8$, $BC = 6$.
 - חשב את α .
 - חשב את שטח המשולש OMB .

4. בגרות קיץ תשפ"א, מועד א'

DB ו-DC משיקים למעגל שמרכזו O, כמתואר בסרטוט. רדיוס המעגל: R.

המשך BD חותך את המשך OC בנקודה A.

הקטע OD והמיתר BC נחתכים בנקודה M.

הקטע CE מאונך ל-AB.

נסמן: $\angle ABC = \alpha$.

א. הסבר מדוע אפשר לחסום במעגל:

(1) את המרובע OBDC.

(2) את המרובע MDEC.

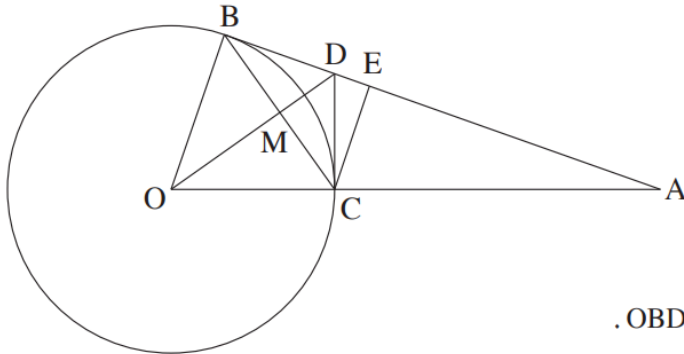
נסמן: d_1 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע OBDC.

d_2 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע MDEC.

d_3 הוא קוטר המעגל החוסם את המשולש AOD.

ב. הבע באמצעות α ו-R את d_1 , את d_2 ואת d_3 .

ג. מצא את הערך של α שבעבורו מתקיים: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3}$.



5. בגרות קיץ תשפ"א, מועד נבצרים

משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו

R. נתון כי $\angle BAC = 80^\circ$. נסמן את הזווית AOB

ב- α , ואת הצלע AB ב-k.

א. הוכח כי $\cos \alpha = 1 - \frac{k^2}{2R^2}$.

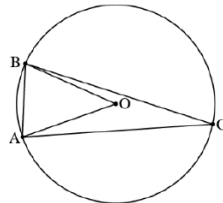
נתון כי $k = \frac{3}{4}R$.

ב. הבע באמצעות R (בלבד) את שטח המשולש ABC.

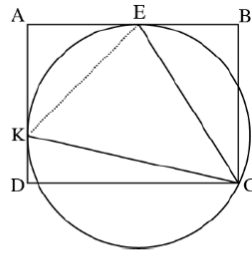
נסמן ב-r את רדיוס מהמעגל החסום במשולש AOB.

ג. חשב את היחס $\frac{R}{r}$.

בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.



6. בגרות קיץ תשפ"א, מועד ב'



המרובע ABCD הוא מלבן ששתיים מצלעותיו, AB ו-AD, משיקות למעגל שרדיוסו R. בנקודות E ו-K בהתאמה (ראה סרטוט). הנקודה C נמצאת על המעגל.

א. הוכח כי $\angle KCE = 45^\circ$.

נתון: $\angle KCD = \alpha$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

ב. (1) הבע באמצעות α את הזווית של המשולש KCE.

(2) הבע באמצעות R ו- α את האורכים של צלעות

המשולש KCE.

ג. הבע באמצעות α את היחס $\frac{EB}{AE}$.

נתון: $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ד. חשב את α .

7. בגרות חורף תשפ"ב

AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O. המיתר CD חותך את הקוטר AB בנקודה F. המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הקוטר AB בנקודה E (ראה סרטוט).

נסמן: $\angle ADE = \alpha$.

א. הראה כי $\angle BAD = 90^\circ - \alpha$.

נתון כי $ED = FD$.

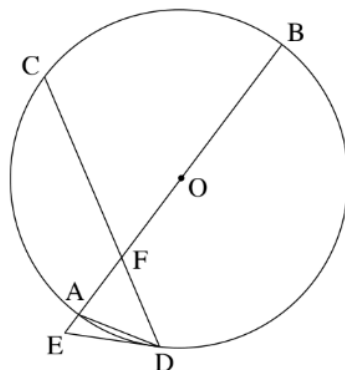
ב. הבע באמצעות α את גודל $\angle CDA$.

ג. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש AFD.

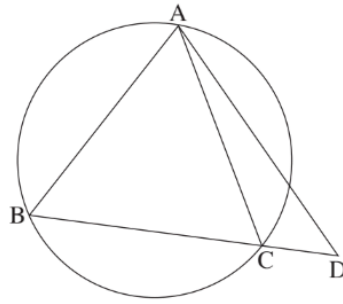
ד. (1) הבע באמצעות α את יחס השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

(2) נתון כי $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1 + \sqrt{3}$.

מצא את α .



8. בגרות חורף תשפ"ב, נבצרים



בציור שלפניך מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $AB = AC$, שחסום במעגל שרדיוסו R .

האריכו את הבסיס BC עד לנקודה D והעבירו ישר מנקודה D לנקודה A .

נתון: $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle CAD = \alpha$.

א. הוכח כי רדיוס המעגל החוסם את משולש ABD

שווה לרדיוס המעגל החוסם את משולש ACD .

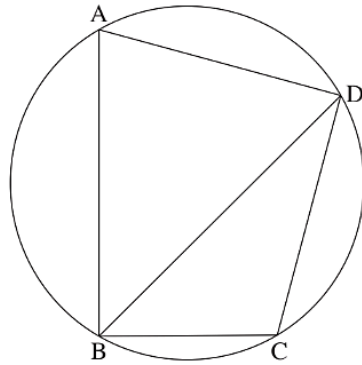
ב. הבע את שטח משולש ACD באמצעות R ו- α .

נסמן ב- m את היחס בין שטח המשולש ACD לבין שטח המשולש ABC .

ג. (1) האם ייתכן כי $m = 0.5$? נמק את תשובתך.

(2) נתון כי $m = 0.6$. מצא את גודלי הזוויות המשולש ABC .

9. בגרות קיץ תשפ"ב, מועד א'



מרובע $ABCD$ חסום במעגל שרדיוסו R ומרכזו O (ראו סרטוט).

נסמן: $\angle DAB = \alpha$, היא זווית חדה.

א. הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות α ו- R .

נתון: $BC = R$, $CD = R\sqrt{2}$.

ב. חשבו את α .

נתון: BD הוא חוצה זווית ABC .

ג. חשבו את גודל הזווית ABD .

נסמן ב- h_1 את הגובה שיוצא מקודקוד A במשולש ABD ,

וב- h_2 את הגובה שיוצא מקודקוד O במשולש BOD .

ד. חשבו את $\frac{h_1}{h_2}$.

10. בגרות קיץ תשפ"ב, מועד ב'

נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R .

מנקודה A , שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה D

וישר אחר, שחותך את המעגל בנקודה B כמתואר בסרטוט.

נסמן: $\angle AOB = \beta$, $\angle AOD = \alpha$.

א. הביעו באמצעות α , β ו- R , אם יש צורך, את:

(1) אורך הקטע AO

(2) אורך הקטע AB

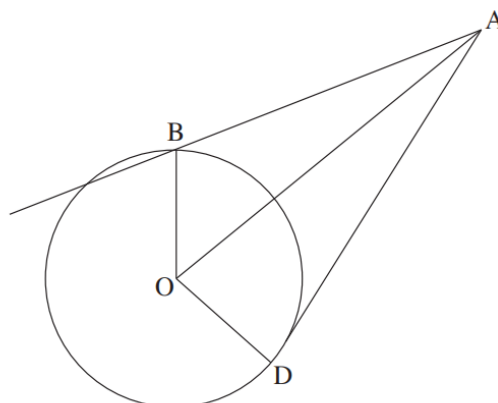
נתון: $AB = \sqrt{2} R$.

ב. הוכיחו כי $\cos \beta = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}$.

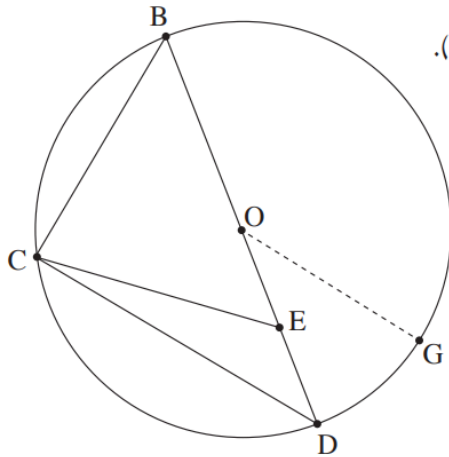
משולש ADO חסום במעגל אחר, שרדיוסו r .

נתון: $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$.

ג. מצאו את גודלי הזוויות α ו- β .



11. בגרות חורף תשפ"ג



משולש BCD חסום במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.
הנקודות O ו-E נמצאות על הצלע BD כך שמתקיים $OE = ED$ (ראו סרטוט).
נסמן: $CD = m$, $\angle CDB = \alpha$.

א. הביעו את $\cos \alpha$ באמצעות m ו-R.

ב. הוכיחו כי $CE = \frac{1}{2} \sqrt{2m^2 + R^2}$.

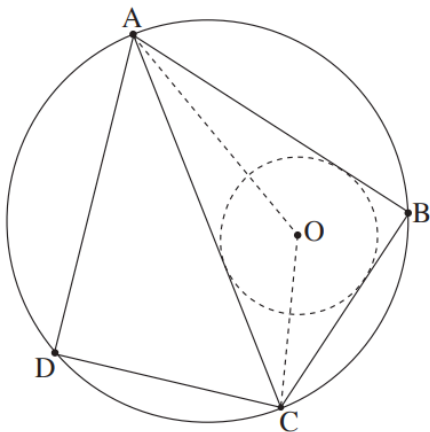
נתון: $BC = EC$.

ג. חשבו את α .

מעבירים רדיוס OG המקביל לצלע CD, כמתואר בסרטוט.

ד. חשבו את גודל הזווית OEG.

12. בגרות קיץ תשפ"ג, מועד א'



דלתון ABCD חסום במעגל שרדיוסו R.

המיתר AC הוא האלכסון הראשי של הדלתון.

הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC (ראו סרטוט).

נסמן: $\angle CAB = \alpha$.

א. (1) מצאו את זווית המשולש AOC (הביעו באמצעות α במידת הצורך).

(2) הביעו את אורך הקטע AO באמצעות α ו-R.

נתון כי אורך הקטע AO הוא $R\sqrt{2}$.

ב. מצאו את גודל הזווית α .

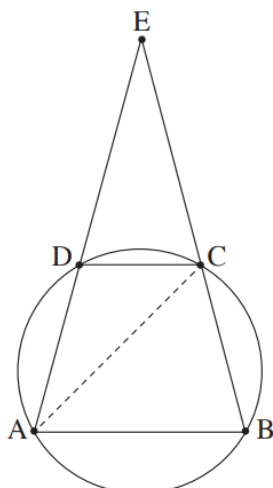
נתון כי שטח הדלתון הוא $25\sqrt{3}$.

ג. מצאו את R.

ד. חשבו את המרחק בין מרכז המעגל החוסם את הדלתון לבין

מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

13. בגרות קיץ תשפ"ג, מועד ב'



נתון טרפז ABCD ($AB \parallel DC$), החסום במעגל.

המשכי הצלעות AD ו-BC נפגשים בנקודה E, כמתואר בסרטוט.

נתון: $\angle ACB = 60^\circ$.

נסמן: $AC = k$, $\angle CDE = \alpha$.

א. (1) מצאו את זווית המשולש ACE (הביעו באמצעות α אם יש צורך).

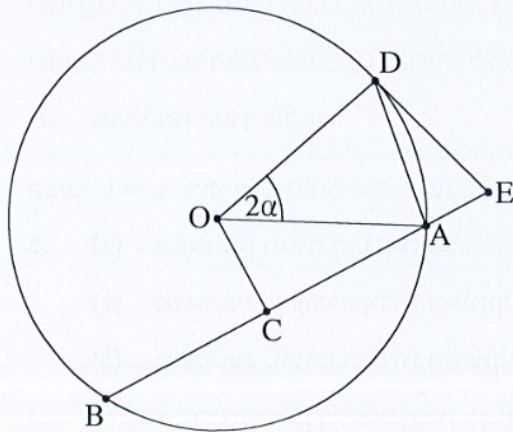
(2) הביעו באמצעות α ו-k את אורכי הצלעות AB ו-DC.

נתון כי שטח המשולש ABE גדול פי 3 משטח המשולש DCE.

ב. מצאו את גודל הזווית α .

ג. מצאו את הערך של k שבעבורו אורך התיכון לצלע EC במשולש AEC הוא $\sqrt{7}$.

14. בגרות חורף תשפ"ד



נתון מעגל שמרכזו O והרדיוס שלו R.
 מנקודה E, הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר החותך את המעגל
 בנקודות A ו-B, כמתואר בסרטוט.
 הנקודה D נמצאת על הקשת הגדולה AB,
 כך שהקטע ED משיק למעגל.

הנקודה C היא אמצע המיתר AB.
 נסמן את הזווית בין הרדיוסים OD ו-OA ב- 2α ($\alpha < 60^\circ$).
 נתון: המרחק של הנקודה O מן המיתר AB הוא $0.5R$.

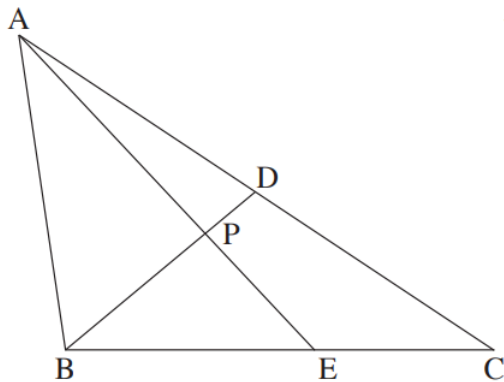
- מצאו את זוויות המרובע DOCE. הביעו באמצעות α אם יש צורך.
- הביעו באמצעות R ו- α את אורך הקטע DE.

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AOD הוא $\frac{4}{7}R$.

- מצאו את α .

- מצאו את היחס בין שטח המעגל החוסם את המרובע DOCE ובין שטח המעגל הנתון.

15. בגרות קיץ תשפ"ד, מועד א'



במשולש ABC, BD הוא תיכון לצלע AC. הנקודה E נמצאת על הצלע BC.
 BD ו-AE נחתכים בנקודה P (ראו סרטוט).

נתון: $BP = 3 \cdot PD$.

נסמן: $AB = k$, $\angle BAP = \alpha$, $\angle ABP = \beta$, $\alpha < \beta$.

- הביעו באמצעות α , β ו-k את אורכי הקטעים AP ו-BP.

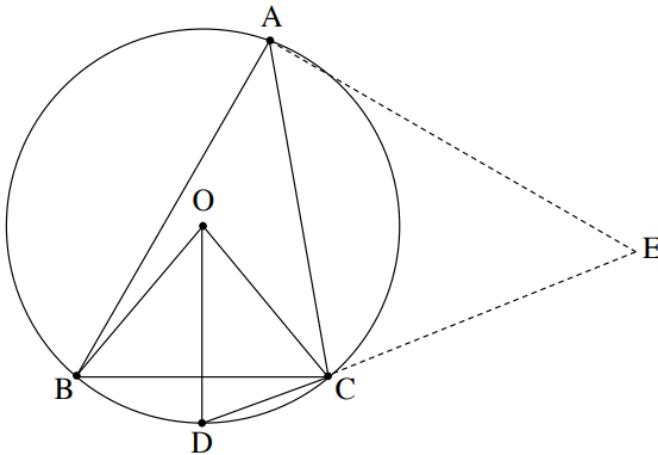
נתון כי AE ו-BD מאונכים זה לזה, וכי שטח המשולש ABD הוא $\frac{1}{4}k^2$.

- מצאו את גודל הזווית α .

- מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC

ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEB.

16. בגרות קיץ תשפ"ד, מועד ב'



משולש ABC חד זוויות חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R. הנקודה D היא אמצע הקשת הקטנה BC, כמתואר בסרטוט.

נתון: $\angle ABC = 60^\circ$.

נסמן: $\angle BAC = \alpha$.

א. הביעו באמצעות R ו- α את שטחי המשולשים ABC ו-ODC.

נתון כי היחס בין שטח המשולש ABC

ובין שטח המשולש ODC הוא $2\sqrt{3} \sin(80^\circ)$.

ב. מצאו את הערך של α .

הנקודה E נמצאת על המשך המיתר DC כך ש- $\angle CAE = 50^\circ$, כמתואר בסרטוט.

ג. הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החסום במשולש ACE.

17. חורף תשפ"ה

נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

מן הנקודה A העבירו שני ישרים AB ו-AC המשיקים למעגל.

הנקודה E היא נקודת ההשקה של הישר AC למעגל, כמתואר בסרטוט.

נתון: $BO \perp AO$, $AE = CE$.

נסמן ב- 2β את הזווית BAC.

א. הביעו באמצעות R ו- β את האורך של AB.

נתון כי האורך של AB הוא $2.5R$,

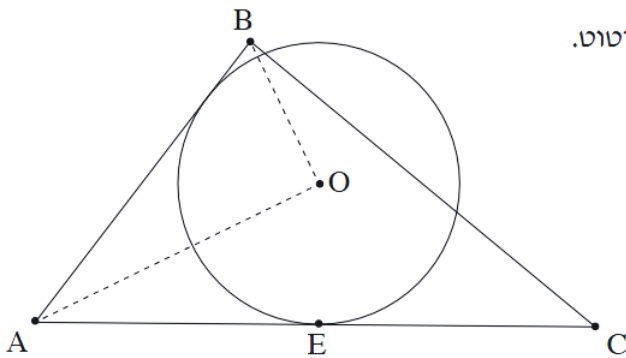
והזווית BAC היא זווית חדה.

ב. מצאו את הערך של β .

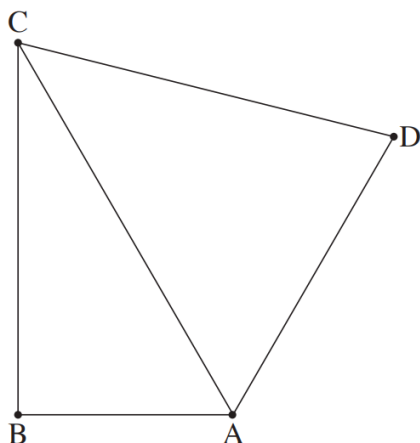
ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש AOB.

נתון כי האורך של רדיוס המעגל החסום את המשולש ABC הוא 8.

ד. מצאו את הערך של R.



18. קיץ תשפ"ה, מועד א



בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\angle ABC = 90^\circ$).
על הצלע AC בנו משולש נוסף ACD כך ש- AC הוא חוצה זווית BAD .
נסמן: $AB = k$, $\angle CAB = \alpha$.

א. הביעו באמצעות k ו- α את האורך של AC .

נתון: $AD = 1.5 \cdot k$, $CD = \sqrt{3.25} \cdot k$.

ב. חשבו את הערך של α .

הציבו $\alpha = 60^\circ$ וענו על סעיפים ג-ד.

הנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC .

ג. הביעו באמצעות k את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC .

הנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC .

נתון: $ME = 4$.

ד. חשבו את הערך של k .

19. קיץ תשפ"ה, מועד ב

5. במשולש שווה שוקיים ABC ($AC = AB$) חסום מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r (ראו סרטוט).
נסמן: $\angle ACB = 2\alpha$.

א. (1) הביעו באמצעות r ו- α את אורך הקטע CO .

(2) הביעו באמצעות r ו- α את אורך הצלע AC .

נתון כי אורך הצלע AC גדול פי $\sqrt{3}$ מאורך הקטע CO .

ב. מצאו את הערך של α .

הציבו $\alpha = 30^\circ$ וענו על הסעיפים ג-ד.

המעגל חותך את הקטע BO בנקודה K .

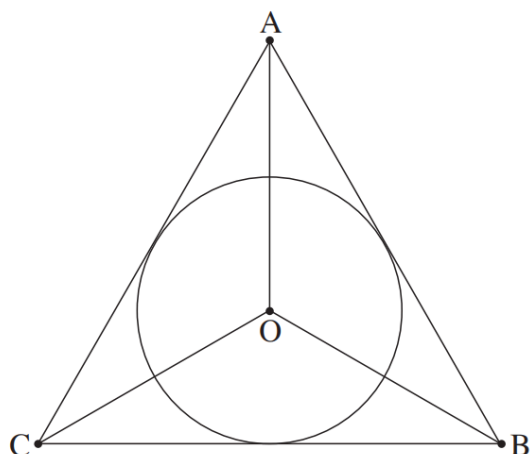
נתון כי אורך הקטע CK הוא $\sqrt{63}$.

ג. מצאו את הערך של r .

הנקודה E נמצאת על הצלע CB .

נתון כי שטח המשולש CKE הוא 6.

ד. חשבו את אורך הקטע BE .



תשובות:

1. בגרות תש"פ, מועד א'

א. $\angle ACB = 90^\circ - \alpha$ ג. היקף המרובע ACBD הוא 76.427 ס"מ

2. בגרות תש"פ, מועד ב'

1. שוקי הטרפז הם $DC = 2k \cos \alpha$ ו- $AB = k$ ב. $\alpha = 30^\circ$ או $\alpha = 60^\circ$ ג. $BE = 2k\sqrt{3}$

3. בגרות תשפ"א, מועד חורף

א. $AO = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin(45^\circ + \frac{\alpha}{2})}$, $BO = \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin(45^\circ + \frac{\alpha}{2})}$ ב. $\angle OBM = 45^\circ$ ג. $\alpha = 36.87^\circ$ ד. 10 יח"ר

4. בגרות קיץ תשפ"א, מועד א'

א. (1) הוכחה (2) הוכחה ב. $d_1 = \frac{R}{\cos \alpha}$, $d_2 = \tan \alpha$, $d_3 = \frac{R}{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha}$ ג. $\alpha = 30^\circ$

5. בגרות קיץ תשפ"א, מועד נבצרים

א. הוכחה ב. $0.72 R^2$ ג. 3.96

6. בגרות קיץ תשפ"א, מועד ב'

א. הוכחה ב. (1) $\angle KCE = 45^\circ$, $\angle CEK = 90^\circ - \alpha$, $\angle CKE = 45^\circ + \alpha$ (2) $KE = \sqrt{2} R$, $CK = 2R \cos \alpha$, $CE = 2R \sin(45^\circ + \alpha)$ ג. $\frac{EB}{AE} = 2 \sin(45^\circ + \alpha) \cdot \sin(45^\circ - \alpha) = \sin(90^\circ + 2\alpha) = \cos 2\alpha$ ד. 22.5°

7. בגרות חורף תשפ"ב

א. $\angle CDA = 3\alpha$ ב. $R^2 \tan 2\alpha \cdot \sin \alpha \cdot \sin 3\alpha$ ג. $\frac{S_{\Delta AFD}}{S_{\Delta AED}} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$ ד. $\alpha = 15^\circ$

8. חורף תשפ"ב, נבצרים

א. הוכחה ב. $R^2 \cos^2 \alpha \tan 2\alpha$ ג. (1) לא ייתכן. (2) 73.22° , 33.56°

9. בגרות קיץ תשפ"ב, מועד א'

א. $BD = 2R \sin(\alpha)$. ב. $\alpha = 75^\circ$. ג. $\angle ABD = 45^\circ$

ד. $\frac{h_1}{h_2} = 3 + \sqrt{3} \approx 4.732$.

10. בגרות קיץ תשפ"ב, מועד ב'

א. $AO = \frac{R}{\cos \alpha}$ (1) . $AB = R \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1 - \frac{2 \cos \beta}{\cos \alpha}}$ (2) . ב. הוכחה.

ג. $\alpha = 58.05^\circ$, $\beta = 47.13^\circ$.

11. בגרות חורף תשפ"ג

א. $\cos \alpha = \frac{m}{2R}$. ב. הוכחה . ג. $\alpha = 37.76^\circ$. ד. $\angle OEG = 115.38^\circ$.

21. בגרות קיץ תשפ"ג, מועד א'

א. (1) 135° , $\frac{1}{2}\alpha$, $45^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ (2) $AO = 2\sqrt{2}R \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)$.

ב. $\alpha = 30^\circ$. ג. $R = 5$. ד. 2.59 .

13. בגרות קיץ תשפ"ג, מועד ב'

א. (1) 120° , $180^\circ - 2\alpha$, $2\alpha - 120^\circ$ (2) $AB = \frac{\sqrt{3}k}{2 \sin \alpha}$, $DC = \frac{k \cdot \sin(2\alpha - 120^\circ)}{\sin \alpha}$.

ב. $\alpha = 75^\circ$. ג. $k = 2$.

14. בגרות חורף תשפ"ד

א. $\angle DEC = 120^\circ - 2\alpha$, $\angle DOC = 2\alpha + 60^\circ$, $\angle OCD = \angle ODE = 90^\circ$.

ב. $DE = \frac{2R \sin \alpha \sin(\alpha + 60^\circ)}{\sin(2\alpha + 60^\circ)}$.

ג. $\alpha = 28.955^\circ$.

ד. 0.549 .

15. [בגרות קיץ תשפ"ד, מועד א'](#)

$$.א \quad BP = \frac{k \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad AP = \frac{k \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$.ב \quad \alpha = 24.3^\circ$$

$$.ג \quad \frac{R_{\Delta AEC}}{R_{\Delta AEB}} = 1.8433$$

16.

17. חורף תשפ"ה

$$.א \quad \frac{2R}{\sin(2\beta)} \quad .ב \quad \beta \approx 26.565^\circ \quad .ג \quad \frac{16}{5} \quad .ד \quad R \approx 4$$

18. קיץ תשפ"ה, מועד א

$CO = \frac{r}{\sin(\alpha)}$	.א (1)
$AC = \frac{r \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) \cdot \cos(2\alpha)}$	(2)
$\alpha = 30^\circ$	.ב
$r = 5$	.ג
$BE = 10\sqrt{3} - 14.4$	.ד

19. קיץ תשפ"ה, מועד ב

$AC = \frac{k}{\cos(\alpha)}$	.א
$\alpha = 60^\circ$	.ב
$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot k$	.ג
~ 11.59	.ד

תשובות סופיות - חוברת בגרריות של יואל גבע

פתרונות מלאים – עופר ילין