

מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $33\frac{1}{3} \times 3 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
- (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתונות הנקודות $A(0, 24)$, $B(18, 0)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות C המקיימות: $AC^2 + BC^2 = 1,250$.

את המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א מזיזים 9 יחידות שמאלה ו-12 יחידות למטה כך שמתקבל מקום גאומטרי חדש.

המקום הגאומטרי החדש חותך את ציר ה-y בנקודות E ו-G (מעל E).

הנקודות F_1 ו- F_2 הן מוקדי אליפסה קנונית שעוברת דרך הנקודות E ו-G,

כמתואר בסרטוט.

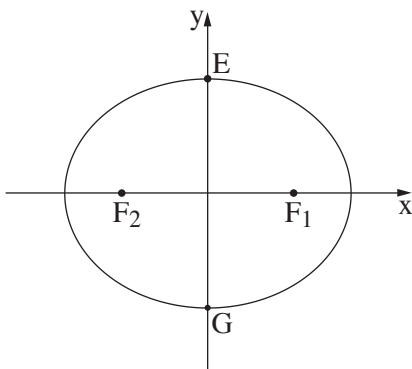
נתון: המרחק בין הישרים EF_1 ו- GF_2 הוא 24.

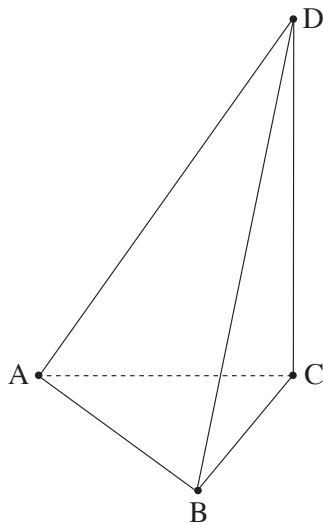
ב. (1) מצאו את שיעורי הנקודה F_1 .

(2) מצאו את משוואת האליפסה.

העבירו מעגלים המשיקים לישר EF_1 , לציר ה-x ולציר ה-y.

ג. מצאו משוואות של שני מעגלים כאלה הנמצאים ברביעים שונים.





2. בפירמידה ABCD, המקצוע DC מאונך למישור ABC.

הנקודה E היא אמצע המקצוע AD.

הנקודה F מקיימת: $\vec{DF} = \frac{k}{2} \cdot \vec{DB} + k \cdot \vec{DC}$, k הוא פרמטר.

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{CD} = \underline{w}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- k את $\vec{EF}$.

נתון: $\vec{EF}$ מקביל למישור ABC.

ב. מצאו את הערך של k.

נתון: $A(0, 0, 0)$, $B(p, 3, 0)$, $C(0, n, 0)$, $D(0, 0, 12)$ הם פרמטרים חיוביים.

$\vec{BD} = (-4, 5, 12)$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 24$.

ג. מצאו את שיעורי הנקודות B, C ו- D.

ד. מצאו את נפח הפירמידה ABCD.

ה. מהו המצב ההדדי בין הישר EF לבין הישר AB? נמקו את קביעתכם.

3. נתונה סדרה הנדסית $z_1, z_2, z_3, \dots$ שאיבריה הם מספרים מרוכבים ומנתה היא q.

z_1 נמצא ברביע הראשון.

נתון: $(z_1)^3 = z_3$

$-2z_1 = \overline{z_3}$

א. הוכיחו כי $q = -z_1$ או $q = z_1$.

ב. מצאו את z_1 .

ענו על הסעיפים ג-ד עבור: $q = z_1$.

ג. z_{4n-2} ו- z_{4n} הם שני איברים בסדרה ההנדסית הנתונה (n הוא מספר טבעי).

קבעו בעבור כל אחד מן האיברים אם הוא מדומה או ממשי. נמקו את קביעותיכם.

ד. מצאו את ערך הסכום: $\frac{z_1}{\sqrt{2}} + \frac{z_2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z_3}{(\sqrt{2})^3} + \dots + \frac{z_{64}}{(\sqrt{2})^{64}}$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{\ln(x) + \ln(a)}{\ln(x) - \ln(a)}$, a הוא פרמטר גדול מ-1.

בסעיפים א-ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
- (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
- (4) מצאו את תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.
- (5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

לפניכם טענה: למשוואה $f(x) = f'(x)$ קיים בדיוק פתרון אחד בתחום $x > a$.

ב. קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקצייה $g(x)$, המקיימת: $g(x) = \ln(f(x))$.

- ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.
- (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 2$ ו- $x = 5$.

נתון: $1 < a < 2$.

ד. הביעו באמצעות S את ערך האינטגרל $\int_2^5 \ln(2 \cdot f(x)) dx$.

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 4}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
- (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
- ב. נתונה הפונקצייה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. הפונקציות $g(x)$ ו- $f(x)$ מוגדרות באותו התחום.
 - (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$ (אם יש כאלה).
 - (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.
 - (3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית שלה ועל ידי הישרים $x = \ln 5$ ו- $x = \ln 8$.
- ג. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.
- נתונה הפונקצייה $s(x) = \int_x^{\ln 3} (f(t) - g(t)) dt$, המוגדרת בתחום $x < \ln 3$.
- ד. מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקצייה $s(x)$ וקבעו את סוגה.

בהצלחה!