

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות

- א. משך הבחינה: שעתיים וארבעים וחמש דקות.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות, על שאלה אחת לפחות מכל פרק – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על שלוש מן השאלות 1-5, על שאלה אחת לפחות מכל פרק (לכל שאלה – $\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתונה אליפסה שמשוואתה היא $\frac{x^2}{25k^2} + \frac{y^2}{16k^2} = 1$. k הוא פרמטר חיובי.

הנקודה F היא המוקד הימני של האליפסה.

נתון מעגל שמרכזו בנקודה F והוא עובר בנקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- x .
א. הביעו באמצעות k את משוואת המעגל.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- y .

הנקודה D היא נקודת החיתוך של הקטע BF עם המעגל.

ב. (1) מצאו את היחס בין הקטע BD ובין הקטע DF .

(2) הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה D .

ג. הביעו באמצעות k את משוואת המשיק למעגל בנקודה D .

בונים ריבוע שאורך הצלע שלו הוא 15.

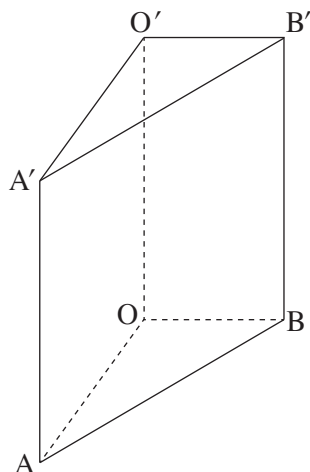
אחת מצלעות הריבוע נמצאת על המשיק שאת משוואתו מצאתם בסעיף ג.

הנקודה B נמצאת בתוך הריבוע.

ד. הביעו באמצעות k את משוואת הישר שעליו נמצאת צלע הריבוע המקבילה למשיק.

נתון כי הנקודה B היא נקודת המפגש של אלכסוני הריבוע.

ה. מצאו את הערך של k .



2. בסרטוט שלפניכם מנסרה ישרה $AOBA'O'B'$

שבסיסה AOB הוא משולש ישר זווית, $\angle AOB = 90^\circ$.

הנקודה K היא אמצע המקצוע AB .

הנקודה E נמצאת על הקטע $O'B$ כך ש- $\vec{O'E} = \frac{1}{3} \cdot \vec{O'B}$.

הנקודה N נמצאת על הקטע AE כך ש- $\vec{AN} = \frac{3}{4} \cdot \vec{AE}$.

נסמן: $\vec{OA} = \underline{u}$, $\vec{OB} = \underline{v}$, $\vec{OO'} = \underline{w}$,

א. (1) הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את $\vec{O'N}$.

(2) הוכיחו כי הנקודות K, N, O' נמצאות על ישר אחד,

ומצאו את היחס בין $O'K$ ובין $O'N$.

נתון: $O(0, 0, 0)$, $A(4, 0, 0)$, $E(0, 1, 6)$.

הקודקוד B נמצא על החלק החיובי של ציר ה- y , והקודקוד O' נמצא על החלק החיובי של ציר ה- z .

ב. מצאו את שיעורי הנקודות N ו- B .

ג. מצאו את משוואת המישור $A'KB'$.

ד. (1) מצאו את המרחק בין הנקודה N ובין המישור $A'KB'$.

(2) מצאו את נפח הפירמידה $NA'KB'$.

3. נתונים שני מספרים מרוכבים z_1 ו- z_2 שמכפלתם היא $-19 + 4i$.

$$z_1 = 2 + 3i$$

א. מצאו את המספר z_2 .

נתונה המשוואה $w^3 = z_1 + z_2$, הוא משתנה מרוכב.

ב. מצאו את פתרונות המשוואה.

נתון מספר מרוכב $z = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$, $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$.

נתון כי המספרים z ו- z^3 נמצאים על ישר אחד שעובר בראשית הצירים.

ג. מצאו את ארבע האפשרויות של המספר z .

פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף ב וארבעת המספרים שמצאתם בסעיף ג, מייצגים את כל הקודקודים של

מצולע קמור במישור גאוס.

ד. (1) סרטטו את המצולע במערכת צירים.

(2) חשבו את השטח של המצולע.

נתון מספר מרוכב $3(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.

מכפילים כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודי המצולע במספר מרוכב זה, כך שנוצר מצולע חדש.

ה. מצאו פי כמה גדול שטח המצולע החדש משטח המצולע שמצאתם בסעיף ד.

**פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות**

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x} + b$, המוגדרת לכל x .
b הוא פרמטר.

א. ענו על התת-סעיפים (1)–(3). הביעו את תשובותיכם באמצעות b, אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y .

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 1.5$.

ב. מצאו את הערך של b (מצאו את שתי האפשרויות).

הציבו בפונקצייה $f(x)$ את הערך של b הקטן ביותר שמצאתם, וענו על הסעיפים ג–ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ידוע כי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y היא אחת משתי נקודות הפיתול של הפונקצייה $f(x)$.
פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת לכל x .

ד. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ה. לפניכם טענה: $\int_0^1 (f(x) - 1.5) dx > \frac{1}{e-1}$.

האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{1 + \ln(x)}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x של הפונקצייה $f(x)$.
 (3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x \cdot \ln(x)}$.

- ד. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתון הביטוי $\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx$, k הוא פרמטר גדול מ-1.

- ה. (1) קבעו איזה מן הביטויים I-II שווה לערך של הביטוי הנתון. נמקו את קביעתכם.
 I. $k + \ln(k)$ II. $k + \ln 2$
 (2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = e^3$ ו- $x = e^6$.

בהצלחה!