

מערכת משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה

משוואה בשני נעלמים

בפרק זה נעסוק במשוואות שבהן מופיעים שני נעלמים.
למשל במשוואה $x + y = 10$ יש שני נעלמים x ו- y .
כדי לפתור משוואה זו עלינו למצוא את x ואת y .
אם נבחר את זוג המספרים $x = 3$ ו- $y = 7$ נראה שזוג מספרים זה מהווה פתרון אפשרי למשוואה, כי $3 + 7 = 10$.
אם נבחר את זוג המספרים $x = 6$ ו- $y = 4$ נראה שגם זוג זה מהווה פתרון אפשרי למשוואה, כי $6 + 4 = 10$.
נוכל למצוא למשוואה זו פתרונות רבים נוספים.
למעשה למשוואה הנתונה $x + y = 10$ יש אינסוף זוגות של מספרים x ו- y המהווים פתרון.
נדגיש כי למרות שלמשוואה יש אינסוף פתרונות, לא כל זוג ערכים של x ו- y מהווה פתרון שלה. אם נבחר $x = 3$, $y = 5$ ונציב אותם במשוואה $x + y = 10$ נקבל $3 + 5 = 8$, כלומר $8 = 10$.
קיבלנו פסוק שקר, לכן הזוג $x = 3$, $y = 5$ אינו מהווה פתרון של המשוואה.

פתרון מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים

נעבור לדון בדרך הפתרון של שתי משוואות בשני נעלמים.

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ y = 3x - 9 \end{cases}$$

נתבונן במערכת המשוואות הבאה:

כפי שראינו קודם, לכל משוואה בפני עצמה קיימים אינסוף זוגות ערכים של x ו- y המהווים פתרון שלה. למשל זוג המספרים $x = 6$, $y = 2$ מהווה פתרון של המשוואה הראשונה וכך גם הזוג $x = 8$, $y = 1$.
כמו כן, זוג המספרים $x = 1$, $y = -6$ מהווה פתרון של המשוואה השנייה וכך גם הזוג $x = 0$, $y = -9$.
מטרתנו היא למצוא זוג ערכים של x ו- y המהווה פתרון של המשוואה הראשונה וגם מהווה פתרון של המשוואה השנייה.
הדרך לפתור מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים, כלומר למצוא את x ו- y היא "להיפטר" מאחד הנעלמים ולהישאר עם משוואה אחת בנעלם אחד שאותה אנחנו יודעים לפתור.
נלמד שתי שיטות לעשות זאת: שיטת ההצבה ושיטת השוואת המקדמים.

שיטת ההצבה

השיטה הראשונה שנלמד לפתרון מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים נקראת שיטת ההצבה.
בשיטה זו נבחר באחת המשוואות ונביע את אחד הנעלמים בעזרת הנעלם השני. אחר כך ניגש למשוואה האחרת, נציב בה את התוצאה שקיבלנו מהמשוואה הראשונה, ונקבל משוואה אחת בנעלם אחד.

דוגמה:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

פתור את מערכת המשוואות

פתרון:

מהמשוואה השנייה אנו יודעים כי $x = y + 1$.
עתה נוכל להציב במשוואה הראשונה $2x + 3y = 12$ את הביטוי $(y + 1)$ בכל מקום שמופיע x . נקבל: $2(y + 1) + 3y = 12$.
קיבלנו משוואה עם נעלם אחד y .
נפתח סוגריים. נקבל: $2y + 2 + 3y = 12$, כלומר $5y = 10$.
נחלק ב-5 את שני האגפים ונקבל $y = 2$.
נציב $y = 2$ במשוואה $x = y + 1$. נקבל $x = 2 + 1$, כלומר $x = 3$.
לסיכום, פתרון המערכת הוא $x = 3$, $y = 2$.
נהוג לרשום את התשובה בצורה $(3; 2)$, כאשר המספר בצד שמאל מייצג את הערך של x והמספר בצד ימין מייצג את הערך של y .

הערה: לאחר שקיבלנו $y = 2$ הצבנו אותו במשוואה $x = y + 1$ וקיבלנו $x = 3$, כלומר $(3; 2)$.
ניתן לבדוק את נכונות הפתרון על ידי כך שנציב $x = 3$ ו- $y = 2$ במשוואה האחרת $2x + 3y = 12$.
אם נעשה זאת נקבל $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$, כלומר $12 = 12$.
קיבלנו פסוק אמת, לכן הפתרון נכון.

דוגמה:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 11 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

פתור את מערכת המשוואות:

פתרון:

עלינו לבודד את אחד הנעלמים מאחת המשוואות.
נוח לבודד את הנעלם שהמקדם שלו הוא 1, לכן נבודד x מהמשוואה השנייה. נעביר את הביטוי $2y$ מאגף שמאל לאגף ימין,
ואז x יהיה לבדו באגף שמאל, כלומר: $x = 5 - 2y$.

עתה נוכל להציב במשוואה הראשונה את הביטוי $(5-2y)$ בכל מקום בו מופיע x .

המשוואה הראשונה היא $5x+6y=11$. נקבל: $5(5-2y)+6y=11$. נפתח סוגריים. נקבל: $25-10y+6y=11$, כלומר $-4y=-14$ ומכאן $y=3\frac{1}{2}$. כדי לקבל את x נציב $y=3\frac{1}{2}$ בביטוי שבו x מבודד כלומר במשוואה $x=5-2y$. נקבל $x=5-2\cdot 3\frac{1}{2}=-2$.

לסיכום, פתרון המשוואה הוא $x=-2$, $y=3\frac{1}{2}$.

נוהגים לרשום זאת $(-2; 3\frac{1}{2})$.

הערה: כאשר מבודדים את x או את y ממשוואה אחת – מציבים אותו במשוואה האחרת.

אם נציב אותו באותה משוואה ממנה בודדנו אותו נקבל פסוק אמת.

דוגמה:

$$\begin{cases} 7x-3y=5 \\ 3x+4y=18 \end{cases}$$

פתור בשיטת ההצבה את מערכת המשוואות

פתרון:

מכיוון שהמקדמים של כל הנעלמים שונים מ-1 ומ-(-1),

זה לא כל כך משנה מאיזו משוואה נבודד את הנעלם.

נבחר לבדוד את x מהמשוואה הראשונה $7x-3y=5$

נעביר את $-3y$ לאגף ימין. נקבל: $7x=3y+5$

נחלק ב-7 את שני האגפים ונקבל: $x=\frac{3y+5}{7}$

נציב במשוואה השנייה את הביטוי $\frac{3y+5}{7}$ במקום x .

נקבל: $3\cdot\frac{3y+5}{7}+4y=18$

נכפול את 3 במונה השבר ונקבל: $\frac{3(3y+5)}{7}+4y=18$

נכפול את כל איברי המשוואה במכנה המשותף 7.

נקבל: $9y+15+28y=126$, כלומר $37y=111$ ומכאן $y=3$.

נציב $y=3$ בביטוי שבו x מבודד, כלומר במשוואה $x=\frac{3y+5}{7}$.

נקבל: $x=\frac{3\cdot 3+5}{7}=2$.

לסיכום, פתרון המערכת הוא $x=2$, $y=3$. רושמים זאת כזוג סדור $(2;3)$.

הערה: מערכת משוואות כזו בה כל המקדמים של x ו- y שונים מ-1 או מ-(-1), מומלץ לפתור בשיטת השוואת המקדמים, אותה נלמד בהמשך.

תרגילים

פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת ההצבה :

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $x + 3y = 36$
$x = 6$ | 2. $7x - y = 32$
$y = 3$ | 3. $3x + 5y = 29$
$2x = 16$ |
| 4. $3x - 7y = 4$
$2y = 4$ | 5. $4x - 5y = 9$
$x = 2y$ | 6. $5x + 3y = 36$
$x = y + 4$ |
| 7. $8x + 5y = 21$
$y = 2x - 3$ | 8. $7x - 3y = 9$
$y = 3x - 5$ | 9. $y = x + 5$
$y = 2x + 4$ |
| 10. $y = -7x + 14$
$y = -5x + 8$ | 11. $2y = x - 1$
$2y = 2x - 8$ | 12. $4y = 3x - 4$
$4y = 5x - 12$ |
| 13. $x + y = 6$
$x - 3y = 2$ | 14. $y - x = 4$
$5x + 3y = 20$ | 15. $3x - 5y = 9$
$x - y = 5$ |
| 16. $5x + 4y = 18$
$x + 3y = 8$ | 17. $-x - y = 12$
$5x - 6y = -5$ | 18. $-y - 3x = -5$
$-3x - 6y = 0$ |
| 19. $3x + 4y = 25$
$3y = 4x$ | 20. $7x + 3y = 20$
$5x = 2y + 6$ | 21. $8x + 5y = 21$
$5x + 7y = 17$ |
| 22. $5x + 4y = 36$
$8x - 7y = 4$ | 23. $8x - 5y = 12$
$9x - 7y = 8$ | 24. $-3x + 5y = 3$
$7x - 4y = 16$ |

תשובות: 1. (6;10) 2. (5;3) 3. (8;1) 4. (6;2) 5. (6;3) 6. (6;2) 7. (2;1) 8. (3;4) 9. (1;6) 10. (3;-7) 11. (7;3) 12. (4;2) 13. (5;1) 14. (1;5) 15. (8;3) 16. (2;2) 17. (-7;-5) 18. (2;-1) 19. (3;4) 20. (2;2) 21. (2;1) 22. (4;4) 23. (4;4) 24. (4;3)

שיטת השוואת המקדמים

נעבור להציג עכשיו שיטה נוספת לפתרון מערכת משוואות בשני נעלמים. השיטה נקראת השוואת מקדמים. גם בשיטה זו ננסה "להיפטר" מאחד הנעלמים, כלומר לקבל משוואה אחת בנעלם אחד. נרשום את הכללים המרכזיים שבהם נשתמש בשיטת השוואת המקדמים.

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \text{ למשל}$$

- (1) מותר לחבר את שני האגפים השמאליים ולהשוות את התוצאה לחיבור בין שני האגפים הימניים, כלומר $a + b = 4 + 2$.
- (2) מותר לחסר בין שני האגפים השמאליים ולהשוות את התוצאה לחיסור בין שני האגפים הימניים, כלומר $a - b = 4 - 2$.

דוגמה:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases} \text{ פתור את מערכת המשוואות}$$

פתרון:

נחבר את האיברים שבאגף שמאל ואת האיברים שבאגף ימין.

$$+ \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases} \text{ נסמן זאת בעזרת הסימן "+" :}$$

$$x + y + x - y = 10 + 6 \quad \text{נקבל:}$$

נכנס איברים דומים. נקבל: $2x = 16$. ניתן לראות שה- y התבטל וקיבלנו משוואה בנעלם אחד. פתרון המשוואה הוא $x = 8$. כדי למצוא את y נציב $x = 8$ באחת משתי המשוואות (לא משנה באיזו מהן!).

נציב למשל במשוואה $x + y = 10$. נקבל: $8 + y = 10$, כלומר $y = 2$.
הערה: אם נציב $x = 8$ במשוואה השנייה $x - y = 6$ נקבל $8 - y = 6$, כלומר $y = 2$ שזו אותה התוצאה עבור y .
 לסיכום, פתרון מערכת המשוואות הוא $(8; 2)$.

בדיקה: כדי לבדוק את הפתרון אפשר להציבו בשתי המשוואות.

$x - y = 6$	$x + y = 10$	נציב $y = 2, x = 8$ בשתי המשוואות:
$8 - 2 = 6$	$8 + 2 = 10$	
$6 = 6$	$10 = 10$	

בשתי המשוואות קיבלנו פסוק אמת, כלומר השוויון מתקיים, לכן $(8; 2)$ הוא פתרון מערכת המשוואות.

הערות:

- א. ניתן גם לחסר בין המשוואות וכך לבטל את ה- x .
נראה זאת באחת הדוגמאות הבאות.
- ב. בדוגמה הקודמת, כאשר חיברנו את המשוואות הנעלם y התבטל וקיבלנו משוואה בנעלם אחד. ה- y התבטל מכיוון שהמקדמים של y בשתי המשוואות היו נגדיים (כלומר שווים עם סימנים הפוכים).
במשוואה הראשונה המקדם של y היה 1 ובמשוואה השנייה המקדם של y היה -1.
בדוגמה הבאה נראה מערכת משוואות שבה המקדמים אינם נגדיים, לכן נצטרך בשלב הראשון להגיע למצב שבו המקדמים של x או y הם נגדיים ורק אחר כך נחבר את המשוואות.

דוגמה:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות}$$

פתרון:

אם נחבר את שתי המשוואות לא נגרום לכך שאחד הנעלמים יתבטל, אלא נקבל $2x + y + 5x - 2y = 7 + 13$, כלומר $7x - y = 20$.
כדי שנוכל לבטל את אחד הנעלמים עלינו להגיע למצב שבו המקדמים של x או של y שווים עם סימנים מנוגדים. למשל, אם נרצה לבטל את ה- y , צריך להגיע למצב שבו נקבל במשוואה אחת $2y$ ובמשוואה השנייה $-2y$ (זה כבר קיים), לכן נכפול את המשוואה הראשונה ב-2.
יש לשים לב כי יש לכפול את כל איברי המשוואה ב-2,

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases} \quad / \cdot 2$$
$$+ \begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$$

כעת המקדמים של y נגדיים.
נחבר את המשוואות. נקבל: $4x + 2y + 5x - 2y = 14 + 13$
ה- y מתבטל. נקבל: $9x = 27$, כלומר $x = 3$.
נציב $x = 3$ במשוואה ראשונה.
נקבל: $2 \cdot 3 + y = 7$, כלומר $6 + y = 7$ ומכאן $y = 1$.
לסיכום, פתרון המערכת הוא $(3; 1)$.

הערה: במערכת המשוואות הבאה נראה מצב בו כדי להגיע למקדמים נגדיים יש לכפול את שתי המשוואות.

דוגמה:

$$\begin{cases} 2x + 7y = -5 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

פתור את מערכת המשוואות

פתרון:

נפתור בשתי דרכים:

בדרך א' נחבר את המשוואות כמו בדוגמאות הקודמות.

בדרך ב' נחסר בין המשוואות.

דרך א' – נרצה להגיע למקדמים שווים בעלי סימנים מנוגדים,

לכן נכפול את **שתי המשוואות**.

נבחר לבטל את x . המקדמים של x הם 2 ו-3.

אם נכפול את המשוואה הראשונה פי -3 נקבל $-6x$.

אם נכפול את המשוואה השנייה פי 2 נקבל $6x$.

כאשר נחבר את שתי המשוואות הנעלם x יתבטל.

$$\begin{cases} 2x + 7y = -5 & / \cdot -3 \\ 3x + 2y = 1 & / \cdot 2 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -6x - 21y = 15 \\ 6x + 4y = 2 \end{cases}$$

נחבר את המשוואות. ה- x מתבטל. נקבל: $-17y = 17$
 $y = -1$

נציב $y = -1$ באחת המשוואות, למשל נציב במשוואה $3x + 2y = 1$.

נקבל: $3x + 2(-1) = 1$, כלומר $3x = 3$ ומכאן $x = 1$.

לסיכום, פתרון המערכת $(1; -1)$.

דרך ב' – ניעזר בחיסור בין המשוואות.

נרצה להגיע למשוואות עם מקדמים שווים ובעזרת חיסור בין

המשוואות נבטל את אחד הנעלמים. נבחר לבטל את ה- x .

כדי להשוות את מקדמי ה- x אפשר לכפול את המשוואה הראשונה

פי 2 ואת המשוואה השנייה פי 3.

$$\begin{cases} 6x + 21y = -15 \\ 6x + 4y = 2 \end{cases}$$

נקבל:

כעת נחסר את המשוואה השנייה מהמשוואה הראשונה.

$$6x + 21y - (6x + 4y) = -15 - 2$$

$$6x + 21y - 6x - 4y = -17$$

$$17y = -17$$

$$y = -1$$

נציב $y = -1$ באחת המשוואות.

נקבל $x = 1$, כלומר פתרון המערכת הוא $(1; -1)$.

תרגילים

פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת השוואת המקדמים :

- | | | |
|--|--|--|
| .3 $\begin{cases} 8x + 3y = 28 \\ 7x - 3y = 2 \end{cases}$ | .2 $\begin{cases} 3x + y = 15 \\ 7x - y = 25 \end{cases}$ | .1 $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 5 \end{cases}$ |
| .6 $\begin{cases} -4x + 6y = 0 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$ | .5 $\begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ -3x - y = -8 \end{cases}$ | .4 $\begin{cases} 7x + 6y = 10 \\ -7x + 4y = 30 \end{cases}$ |
| .9 $\begin{cases} 2x + 5y = 24 \\ -x + 8y = 30 \end{cases}$ | .8 $\begin{cases} 5x - 4y = 12 \\ 7x + y = 30 \end{cases}$ | .7 $\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ x + y = 8 \end{cases}$ |
| .12 $\begin{cases} 9x + 2y = 29 \\ -3x + 4y = 37 \end{cases}$ | .11 $\begin{cases} 3x + 20y = 20 \\ 2x - 5y = 50 \end{cases}$ | .10 $\begin{cases} 7x + 4y = 33 \\ 5x - 2y = 9 \end{cases}$ |
| .15 $\begin{cases} 3x - 11y = -32 \\ 6x - 5y = 4 \end{cases}$ | .14 $\begin{cases} 3x + 5y = 17 \\ 8x + y = 33 \end{cases}$ | .13 $\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ 5x + y = 18 \end{cases}$ |
| .18 $\begin{cases} 3x - 4y = 25 \\ 3x - 6y = 27 \end{cases}$ | .17 $\begin{cases} 7x + 2y = 27 \\ 3x + 2y = 15 \end{cases}$ | .16 $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 8x - 7y = 10 \end{cases}$ |
| .30 $\begin{cases} -x + 5y = 12 \\ -x + 3y = 6 \end{cases}$ | .29 $\begin{cases} 5x - y = 18 \\ 7x - y = 26 \end{cases}$ | .19 $\begin{cases} 10x - 3y = 49 \\ 8x - 3y = 41 \end{cases}$ |
| .24 $\begin{cases} -4x + 9y = 79 \\ 3x + 4y = 16 \end{cases}$ | .23 $\begin{cases} 2x + 5y = 14 \\ 7x - 3y = 8 \end{cases}$ | .22 $\begin{cases} 5x + 3y = 29 \\ 7x - 5y = 13 \end{cases}$ |
| .27 $\begin{cases} 5x + 4y = 18 \\ 7x + 6y = 26 \end{cases}$ | .26 $\begin{cases} 4x + 3y = 30 \\ 7x + 5y = 52 \end{cases}$ | .25 $\begin{cases} 5x - 4y = 7 \\ -2x - 3y = -12 \end{cases}$ |
| .30 $\begin{cases} 3x - 4y = 26 \\ 5x - 6y = 42 \end{cases}$ | .29 $\begin{cases} 5x - 4y = -18 \\ 7x - 3y = -7 \end{cases}$ | .28 $\begin{cases} 9x - 2y = 55 \\ 7x - 3y = 50 \end{cases}$ |

פתור את מערכות המשוואות הבאות בדרך הנוחה ביותר :

$$\begin{array}{lll} 5x + 4y = 50 & .33 & 7x + 5y = 36 & .32 & x = 7 - y & .31 \\ 7x + 6y = 72 & & 8x - 5y = 9 & & x - y = -1 & \end{array}$$

תשובות: 1. $(8;3)$. 2. $(4;3)$. 3. $(2;4)$. 4. $(-2;4)$. 5. $(3;-1)$. 6. $(\frac{1}{2};\frac{1}{3})$. 7. $(5;3)$. 8. $(4;2)$. 9. $(2;4)$. 10. $(3;3)$. 11. $(20;-2)$. 12. $(1;10)$. 13. $(2;8)$. 14. $(4;1)$. 15. $(4;4)$. 16. $(3;2)$. 17. $(3;3)$. 18. $(7;-1)$. 19. $(4;-3)$. 20. $(4;2)$. 21. $(3;3)$. 22. $(4;3)$. 23. $(2;2)$. 24. $(-4;7)$. 25. $(3;2)$. 26. $(6;2)$. 27. $(2;2)$. 28. $(5;-5)$. 29. $(2;7)$. 30. $(6;-2)$. 31. $(3;4)$. 32. $(3;3)$. 33. $(6;5)$.

מערכות של משוואות לא מסודרות

עד עתה עסקנו במערכות של משוואות מסודרות. כאשר נקבל מערכות של משוואות שאינן מסודרות, נבצע במידת הצורך פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים ונדאג שהנעלמים x ו- y ירוכזו באגף אחד של המשוואה והמספרים ירוכזו באגף השני של המשוואה. בשלב זה נבחר את שיטת הפתרון: הצבה או השוואת מקדמים.

דוגמה:

$$\begin{cases} 6x + 4y - 23 = 2x & \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:} \\ 8x + 8 = 5y - 11 \end{cases}$$

נעביר את האיברים עם ה- x וה- y לאגף שמאל ואת המספרים

$$\begin{cases} 6x + 4y - 2x = 23 & \text{לאגף ימין:} \\ 8x - 5y = -11 - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 4y = 23 & \text{נכנס איברים דומים:} \\ 8x - 5y = -19 \end{cases}$$

בשלב זה נחליט על שיטת הפתרון: במקרה זה שיטת השוואת המקדמים נוחה יותר.

$$\begin{cases} 4x + 4y = 23 & / \cdot -2 \\ 8x - 5y = -19 \end{cases} \quad \text{נכפול את המשוואה הראשונה ב-2:}$$

$$\begin{cases} -8x - 8y = -46 \\ 8x - 5y = -19 \end{cases} +$$

נחבר את שתי המשוואות. נקבל: $-13y = -65$ ומכאן $y = 5$.

נציב $y = 5$ במשוואה $4x + 4y = 23$. נקבל $4x + 4 \cdot 5 = 23$, כלומר $4x = 3$

ומכאן $x = \frac{3}{4}$. לסיכום, פתרון המערכת הוא $(\frac{3}{4}; 5)$.

דוגמה:

$$\begin{cases} 7(x-4) - 5(y-7) = 30 - 4y \\ 5(x+2) + 8(y-1) = 54 + 2x \end{cases}$$

פתור את מערכת המשוואות:

פתרון:

$$\begin{cases} 7x - 28 - 5y + 35 = 30 - 4y \\ 5x + 10 + 8y - 8 = 54 + 2x \end{cases}$$

נפתח סוגריים ונקבל:

נעביר את האיברים עם ה- x וה- y לאגף שמאל ואת המספרים לאגף ימין ונכנס איברים דומים. נקבל:

$$\begin{cases} 7x - y = 23 \\ 3x + 8y = 52 \end{cases}$$

נפתור בשיטת ההצבה. נבודד את y מהמשוואה הראשונה על ידי כך שנעביר אותו לאגף ימין. נקבל: $7x - 23 = y$.

נציב במשוואה השנייה $7x - 23$ במקום y . נקבל: $3x + 8(7x - 23) = 52$.

נפתח סוגריים. נקבל: $3x + 56x - 184 = 52$, כלומר $59x = 236$ ומכאן $x = 4$. נציב $x = 4$ במשוואה $7x - 23 = y$ ונקבל $y = 5$.

לסיכום, פתרון המערכת הוא $(4;5)$.

תרגילים

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} 1. & \begin{cases} 9x + 5y = 40 + 3x \\ 5x + 3y = 39 - 4y \end{cases} \\ 2. & \begin{cases} 5x - 3y = 20 + 2x - 5y \\ 8x - 4y = 3x + 2y - 4 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3. & \begin{cases} 7x - 4y + 8 = 2x - 5y + 26 \\ 5x - 8 + 4y = 3x - 5y + 25 \end{cases} \\ 4. & \begin{cases} 3x - 9 + 11y + 21 = 69 - 3x \\ 7x - 8 + 9y + 12 = 50 + 3y \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 5. & \begin{cases} 3(2y - 5) = 6 + x \\ 2(3x - 4) = 4x - 2 \end{cases} \\ 6. & \begin{cases} 5(x + 3) - 7(y - 8) = 68 \\ y = 2x - 6 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 7. & \begin{cases} 6 - 5(2x + 7) = -27 - 3(y + 2) \\ -4(9y - 3) = 2 - (2x + 3y) \end{cases} \\ 8. & \begin{cases} 6 - (x + 8) = (x + y)2 \\ 5 + (y - 2) = 14 - (x + 3)4 \end{cases} \end{array}$$

תשובות: 1. $(5;2)$. 2. $(4;4)$. 3. $(3;3)$. 4. $(4;3)$. 5. $(3;4)$. 6. $(5;4)$. 7. $(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$. 8. $(0;-1)$.

מערכות של משוואות עם שברים

דוגמה:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 1 \\ \frac{x+y}{7} - \frac{3x-y}{3} = 1 - \frac{y}{4} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות:}$$

פתרון:

נכפול כל משוואה במכנה המשותף הקטן ביותר שלה.
המכנה המשותף הקטן ביותר במשוואה הראשונה הוא 6, ולכן נכפול את המשוואה ב-6. המכנה המשותף הקטן ביותר במשוואה השנייה הוא 84, לכן נכפול את המשוואה ב-84.

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = 1 \quad / \cdot 6 \\ \frac{12}{7}x + \frac{12}{7}y - \frac{28}{3}x + \frac{28}{3}y = 84 - 21y \quad / \cdot 84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 12(x+y) - 28(3x-y) = 84 \cdot 1 - 21y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 12x + 12y - 84x + 28y = 84 - 21y \end{cases} \quad \text{נפתח סוגריים:}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -72x + 61y = 84 \end{cases} \quad \text{נעביר אגפים ונכנס איברים דומים:}$$

נפתור בשיטת ההצבה. נבודד את y מהמשוואה הראשונה $y = 2x - 6$.

נציב במשוואה השנייה את הביטוי $(2x - 6)$ במקום y .

$$-72x + 61(2x - 6) = 84$$

לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים נקבל $50x = 450$

$$\text{ומכאן } x = 9$$

נציב $x = 9$ במשוואה שבה y מבודד, כלומר $y = 2x - 6$.

$$\text{נקבל } y = 2 \cdot 9 - 6, \text{ כלומר } y = 12$$

לסיכום, פתרון המערכת הוא $(9; 12)$.

הערה: אפשר גם לקחת כל אחת מהמשוואות בנפרד, להביא אותה למצב הפשוט ביותר ואז לפתור מערכת בין שתי משוואות פשוטות.

פתור את מערכות המשוואות הבאות :

- .9** $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 1$ **.10** $\frac{6x}{5} - \frac{4y}{3} = 8$ **.11** $\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 6$
 $y - x = 4$ $x - 2y = 4$ $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$
- .12** $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$ **.13** $\frac{3x}{5} - \frac{2y}{3} = \frac{8}{15}$ **.14** $3x + \frac{y}{3} = 21 + 2y$
 $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ $\frac{x}{2} - y = 0$ $\frac{x}{4} + 5y = 11$
- .15** $2x - y = 7$ **.16** $\frac{2x + y}{3} = \frac{y - 1}{4}$ **.17** $\frac{4x + 3y}{10} = \frac{2y + 1}{5}$
 $\frac{x}{2} = \frac{x - y}{3}$ $2y - 5x = 15$ $y = x + 1$
- .18** $7x - 2y = 15$ **.19** $\frac{2x - 3}{2} + \frac{y + 1}{8} = 4$
 $\frac{2x + 3y}{5} - 2 = \frac{x}{3}$ $\frac{x + 1}{3} + \frac{3y - 1}{4} = 4$
- .20** $\frac{x - 3}{5} + \frac{3y + 3}{6} = 3$ **.21** $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2$
 $\frac{2x + 4}{5} - \frac{y - 3}{5} = 4$ $\frac{x + y}{5} - \frac{2x - y}{4} = 1 - \frac{x}{6}$
- .22** $\frac{4x + 3y}{5} - \frac{x - 6}{3} = 5 - \frac{y + 2}{10}$ **.23** $\frac{y + 3}{8} - \frac{2y + x}{5} = 3 - \frac{x + 6}{2}$
 $\frac{x + 6}{4} + \frac{y + 2}{5} = 2 - \frac{y - 8}{3}$ $\frac{x + 4}{5} - \frac{y - 5}{4} = 2 - \frac{y + 3}{3}$
- .24** $\frac{y + 2}{3} - \frac{8x - 1}{5} = 1 - \frac{y - 4}{6}$ **.25** $5y - \frac{y + 1}{3} = 38 - \frac{x + 2}{6}$
 $4(x - 3) - (y - 2) = -11$ $(x - y)4 = 4 - (x + 6)2$

תשובות: **.9** (6;10) **.10** (10;3) **.11** (12;20) **.12** (15;-8) **.13** (2;1)
.14 (8;1.8) **.15** (2.8;-1.4) **.16** (-1;5) **.17** (1;2) **.18** (3;3) **.19** (5;3)
.20 (8;3) **.21** (6;4) **.22** (-6;8) **.23** (-4;-3) **.24** ($\frac{3}{4}$;4) **.25** (4;8)

מערכות מיוחדות של משוואות בשני נעלמים

בכל מערכות המשוואות שפתרנו עד עכשיו היה זוג מספרים יחיד $(x;y)$, המהווה פתרון של המערכת. נראה עכשיו מערכות של משוואות שיש להן אינסוף פתרונות או כאלה שאין להן פתרון.

דוגמה:

$$\begin{aligned} 6x - 2y &= 4 \\ y &= 3x - 2 \end{aligned}$$

פתרון:

ניעזר בשיטת ההצבה. מהמשוואה השנייה ידוע $y = 3x - 2$. נציב במשוואה הראשונה $3x - 2$ במקום y . נקבל: $6x - 2(3x - 2) = 4$, כלומר $6x - 6x + 4 = 4$ ומכאן $0 = 0$. קיבלנו פסוק אמת, לכן יש למערכת המשוואות אינסוף פתרונות.

הערות:

(1) למרות שלמערכת יש אינסוף פתרונות, לא כל זוג סדור $(x;y)$ מהווה פתרון של המערכת. אם נחלק את המשוואה הראשונה ב-2 ונבודד את y נקבל $y = 3x - 2$ שזו משוואה זהה למשוואה השנייה. במילים אחרות, שתי המשוואות זהות זו לזו ושקולות למשוואה $y = 3x - 2$. למשוואה אחת בשני נעלמים יש אינסוף פתרונות, לכן למערכת המשוואות הנתונה יש אינסוף פתרונות $(x;y)$ הזהים לאינסוף הפתרונות של המשוואה $y = 3x - 2$, כלומר כל הפתרונות של המערכת מקיימים את הקשר $y = 3x - 2$. (2) אם נפתור מערכת משוואות (מערכת אחרת מזו הנתונה) ונקבל בסוף התהליך פסוק שקר, למשל $0 = 9$, נדע שלמערכת אין פתרון, כלומר אין אף זוג סדור $(x;y)$ המקיים את שתי המשוואות.

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

26.	$4x - 2y = 1$	27.	$4x + 8 = 0$
	$y = 2x + 5$		$x + 2y - 1 = 2(y - x) + 3x$
28.	$x + 3y = 10$	29.	$x + y = 6$
	$2x + 6y = 20$		$4(x - y) - 3(x + y) = x - 7y$

תשובות: 26. אין פתרון. 27. אין פתרון. 28. אינסוף פתרונות המקיימים $x + 3y = 10$. 29. אינסוף פתרונות המקיימים $x + y = 6$.

הנוסחאות לכפל מקוצר

קיימים מקרים בהם אפשר למצוא מכפלה של דו-איבר בדו-איבר גם בדרך קצרה יותר, וזאת בעזרת נוסחאות הנקראות הנוסחאות לכפל מקוצר. בשלב ראשון נציג שלוש נוסחאות כאלה.

הנוסחה להפרש ריבועים

הנוסחה הראשונה עוזרת לבצע כפל מהצורה $(a+b)(a-b)$. אם נבצע כפל כזה נקבל: $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$ קיבלנו $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

הנוסחה: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

דוגמה:

פתח את הסוגריים בעזרת הנוסחה $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:
א. $(x+6)(x-6)$ ב. $(3x+4)(3x-4)$

פתרון:

א. ניעזר בנוסחה ונקבל: $(x+6)(x-6) = x^2 - 6^2 = x^2 - 36$

הערה: ניתן לפתוח את הסוגריים גם ללא הנוסחה.

נקבל: $(x+6)(x-6) = x^2 - 6x + 6x - 36 = x^2 - 36$

ב. ניעזר בנוסחה ונקבל: $(3x+4)(3x-4) = (3x)^2 - 4^2 = 9x^2 - 16$

תרגילים

חשב את הביטויים הבאים בעזרת הנוסחה $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

- | | |
|------------------------|---------------------|
| 1. $(x+3)(x-3)$ | 2. $(x+6)(x-6)$ |
| 3. $(x-8)(x+8)$ | 4. $(k-1)(k+1)$ |
| 5. $(2x+3)(2x-3)$ | 6. $(9-4b)(9+4b)$ |
| 7. $(5k+3c)(5k-3c)$ | 8. $(x^2-5)(x^2+5)$ |
| 9. $(2x^2+b)(2x^2-b)$ | 10. $(ab+c)(ab-c)$ |
| 11. $(x^2y-z)(x^2y+z)$ | 12. $(-a+4)(-a-4)$ |

$$(-4x-7)(-4x+7) \quad .13 \quad \left(\frac{3}{4x}-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{2}{5}\right) \quad .14$$

$$\left(-\frac{2x}{9}-7\right)\left(-\frac{2x}{9}+7\right) \quad .15 \quad \left(\frac{a^3}{k^2}+\frac{k}{a}\right)\left(\frac{a^3}{k^2}-\frac{k}{a}\right) \quad .16$$

תשובות: 1. x^2-9 2. x^2-36 3. x^2-64 4. k^2-1 5. $4x^2-9$ 6. $81-16b^2$ 7. $25k^2-9c^2$ 8. x^4-25 9. $4x^4-b^2$ 10. $a^2b^2-c^2$ 11. $x^4y^2-z^2$ 12. a^2-16 13. $16x^2-49$ 14. $\frac{9}{16x^2}-\frac{4}{25}$ 15. $\frac{4x^2}{81}-49$ 16. $\frac{a^6}{k^4}-\frac{k^2}{a^2}$

הנוסחאות לדו איבר בריבוע

נציג עכשיו שתי נוסחאות נוספות שבעזרתן אפשר לפתוח סוגריים מהצורה $(a+b)^2$ או $(a-b)^2$.
ראינו כי כל ביטוי בריבוע ניתן להצגה כמכפלה.
למשל: $6^2 = 6 \cdot 6$, $x^2 = x \cdot x$ וכו'. נביע את הביטוי $(a+b)^2$.
נקבל: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
קיבלנו $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$\text{הנוסחה: } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

דוגמה:

פתח את הסוגריים בעזרת הנוסחה $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:
א. $(x+3)^2$ ב. $(2x+5)^2$

פתרון:

א. ניעזר בנוסחה ונקבל: $(x+3)^2 + x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
הערה: ניתן לפתוח את הסוגריים גם ללא הנוסחה.
נקבל: $(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$
ב. ניעזר בנוסחה ונקבל: $(2x+5)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$

הערה: כדי להציג נוסחה נוספת נביע את הביטוי $(a-b)^2$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{קיבלנו } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{הנוסחה: } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

דוגמה:

פתח את הסוגריים בעזרת הנוסחה $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

א. $(x-5)^2$ ב. $(3x-7)^2$

פתרון:

א. ניעזר בנוסחה ונקבל: $(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

הערה: ניתן לפתוח את הסוגריים גם ללא הנוסחה.

נקבל: $(x-5)^2 = (x-5)(x-5) = x^2 - 5x - 5x + 25 = x^2 - 10x + 25$

ב. ניעזר בנוסחה ונקבל: $(3x-7)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 7 + 7^2 = 9x^2 - 42x + 49$

הערה: ידוע כי $(-8)^2 = 8^2$, $(-x)^2 = x^2$ וכו'.

באופן דומה, מתקיים: (1) $(a-b)^2 = (b-a)^2$

(2) $(-a-b)^2 = (-(a+b))^2 = (a+b)^2$

דוגמה:

חשב את הביטוי $(-4+a)^2$

פתרון:

דרך א' – המחובר השמאלי שבסוגריים הוא עם סימן מינוס והמחובר הימני שבסוגריים עם סימן פלוס, לכן עדיף להפוך את הסדר ביניהם,

כלומר $(-4+a)^2 = (a-4)^2$.

כעת ניעזר בנוסחה $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

נקבל: $(a-4)^2 = a^2 - 8a + 16$.

דרך ב' – כאשר למדנו חוקי חזקות, ראינו כי $(a-b)^2 = (b-a)^2$,

לכן $(-4+a)^2 = (4-a)^2$

כעת ניעזר בנוסחת הכפל המקוצר ל- $(a-b)^2$ ונקבל $(4-a)^2 = 16 - 8a + a^2$

דוגמה:

חשב את הביטוי $(-2x-7)^2$.

פתרון:

ראינו כי $(-a-b)^2 = (a+b)^2$, לכן $(-2x-7)^2 = (2x+7)^2$.

כעת ניעזר בנוסחה ל- $(a+b)^2$ ונקבל: $(2x+7)^2 = 4x^2 + 28x + 49$.

חשב את הביטויים הבאים בעזרת הנוסחאות $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$:

1. $(x+3)^2$ 2. $(x-8)^2$ 3. $(k+5)^2$

4. $(4-b)^2$ 5. $(2x+1)^2$ 6. $(3x-2)^2$

7. $(x^2+3)^2$ 8. $(ab-c)^2$ 9. $(-x-6)^2$

$$(-4x+5)^2 \quad .10 \quad (x^2y-k)^2 \quad .11 \quad (2x^3-5)^2 \quad .12$$

$$\left(\frac{3x}{4}+4\right)^2 \quad .13 \quad \left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2 \quad .14 \quad \left(\frac{a^2}{b^3}-\frac{b^2}{a^3}\right)^2 \quad .15$$

תשובות: 1. x^2+6x+9 2. $x^2-16x+64$ 3. $k^2+10k+25$ 4. $16-8b+b^2$ 5. $4x^2+4x+1$ 6. $9x^2-12x+4$ 7. x^4+6x^2+9 8. $a^2b^2-2abc+c^2$ 9. $x^2+12x+36$ 10. $16x^2-40x+25$ 11. $x^4y^2-2x^2yk+k^2$ 12. $4x^6-20x^3+25$ 13. $\frac{9x^2}{16}+6x+16$ 14. $\frac{a^2}{b^2}-2+\frac{b^2}{a^2}$ 15. $\frac{a^4}{b^6}-\frac{2}{ab}+\frac{b^4}{a^6}$

משוואות הכוללות שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר

דוגמה:

$$(2x-3)^2-57=4(x^2-12x) \quad \text{פתור את המשוואה}$$

פתרון:

$$\text{נפתח את הביטוי } (2x-3)^2 \text{ לפי הנוסחה } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 - 57 = 4x^2 - 48x \quad \text{נקבל את המשוואה:}$$

$$4x^2 - 12x + 9 - 57 = 4x^2 - 48x$$

נעביר את כל האיברים לאגף שמאל ונכנס איברים דומים.

$$36x - 48 = 0 \quad \text{נקבל את המשוואה:}$$

$$36x = 48 \quad \text{ומכאן } x = \frac{48}{36} = 1\frac{1}{3} \quad \text{נעביר את המספר } -48 \text{ לאגף ימין. נקבל}$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$(x+3)^2 = x^2 + 21 \quad .1 \quad (x-3)^2 = x^2 + 6 \quad .2$$

$$(x-5)^2 = x(x+15) \quad .3 \quad (x+4)^2 = x(x-8) \quad .4$$

$$(x-6)(x+6) = x^2 + 4x \quad .5 \quad 2x(8x-1) = (4x+3)(4x-3) \quad .6$$

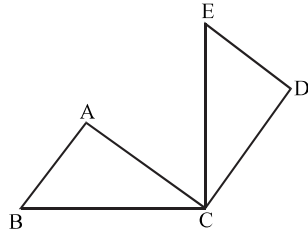
$$(2x-3)^2 - (6+4x)x = 0 \quad .7 \quad (3x+5)^2 = 9(x+2)(x-2) \quad .8$$

$$(2x+5)(2x-5) = 8x^2 - (2x+1)^2 \quad .9 \quad (x+5)^2 - (x-6)^2 = 121 \quad .10$$

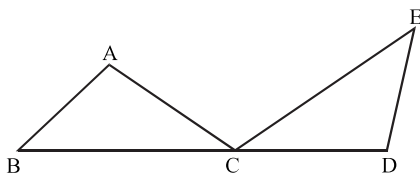
תשובות: 1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. -1 5. -9 6. 4.5 7. $\frac{1}{2}$ 8. $-\frac{1}{30}$

9. 6 10. 6

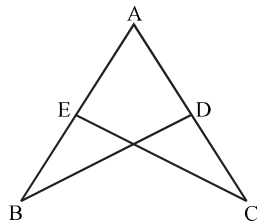
בעיות נוספות עם חפיפת משולשים



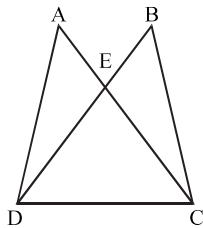
24. בשרטוט שלפניך נתון:
 $AC = DC$, $BC = CE$
 א. הוכח: $\angle BCE = \angle DCA$
 ב. הוכח: $AB = DE$



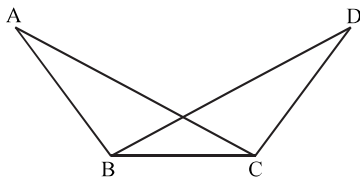
25. בשרטוט שלפניך נתון: $BC = CE$,
 א. הוכח: $\angle B = \angle E$, $AB = DE$
 ב. נתון: $\angle ACE = 114^\circ$
 חשב את הזווית ACB
 ג. האם מתקיים בהכרח $BC = DC$?



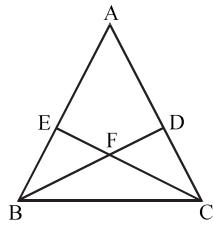
26. בשרטוט שלפניך נתון:
 $AD = AE$, $AB = AC$
 א. הוכח: $\triangle AEC \cong \triangle ADB$
 ב. הוכח: $\angle BEC = \angle CDB$



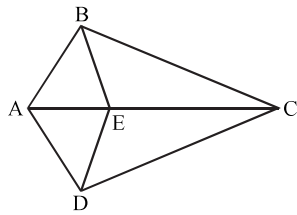
27. בשרטוט שלפניך נתון: $AD = BC$,
 $\angle ADC = \angle BCD$
 א. הוכח: $\triangle ADC \cong \triangle BCD$
 ב. נתון: $\angle ACD = 52^\circ$
 חשב את הזווית DEC



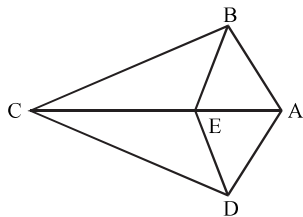
28. בשרטוט שלפניך נתון:
 $\angle ABC = \angle DCB$, $\angle A = \angle D$
 א. הוכח: $AC = DB$
 ב. נתון: $\angle BEC = 120^\circ$, $\angle ABC = 125^\circ$
 חשב את הזווית ACB



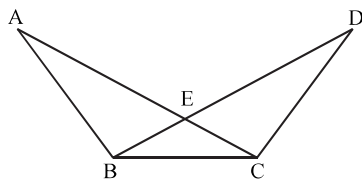
29. בשרטוט שלפניך נתון:
- א. הוכח: $CE \perp AB$.
 - ב. נתון $BD = a$, $EF = b$.
 - הבע את CF באמצעות a ו- b .



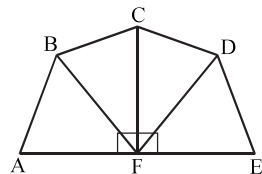
30. בשרטוט שלפניך נתון:
- א. הוכח: $\angle BAC = \angle DAC$.
 - ב. הוכח: $BE = DE$.



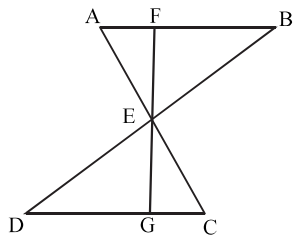
31. בשרטוט שלפניך נתון:
- א. הוכח: $\angle BCA = \angle DCA$.
 - ב. הוכח: $\angle ABC = \angle ADC$.



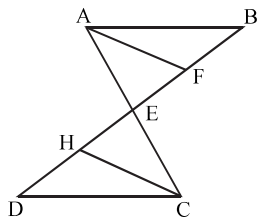
32. בשרטוט שלפניך נתון:
- א. הוכח: $\angle ACB = \angle DBC$.
 - ב. הוכח: $AE = DE$.



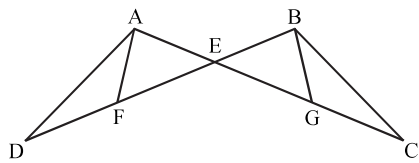
33. בשרטוט שלפניך נתון: $AB = DE$,
- א. הוכח: $\angle A = \angle E$.
 - ב. הוכח: $BC = DC$.



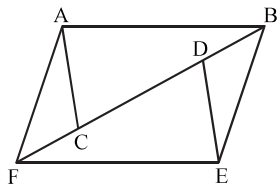
34. הקטעים AC ו-BD חוצים זה את זה בנקודה E.
 הקטע FG עובר דרך נקודה E.
 א. הוכח: $EF = EG$.
 ב. הוכח: $AG = FC$.



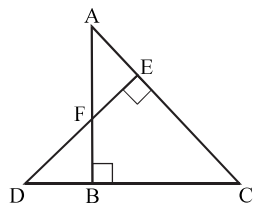
35. בשרטוט שלפניך: הקטעים AC ו-BD נחצים בנקודה E.
 E – אמצע הקטע FH.
 הוכח: $\angle BAF = \angle DCH$.



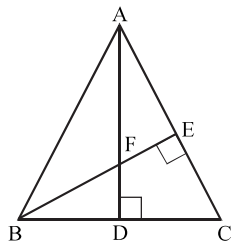
36. בשרטוט שלפניך נתון: $DF = CG$,
 $\angle AFD = \angle BGC$, $AF = BG$.
 א. הוכח: $DE = CE$.
 ב. נתון: $AE = AF$.
 הוכח: $BE = BG$.



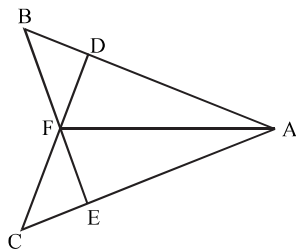
37. בשרטוט שלפניך נתון: $BD = FC$,
 $\angle ABF = \angle EFB$, $\angle ACF = \angle EDB$.
 א. הוכח: $AB = EF$.
 ב. הוכח: $AF = BE$.



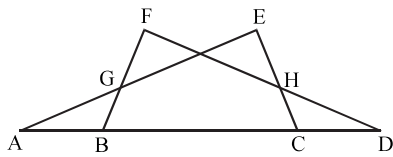
38. בשרטוט שלפניך נתון: $BC = EC$,
 $AB \perp DC$, $DE \perp AC$.
 א. הוכח: $AC = DC$.
 ב. הוכח: $AF = DF$.



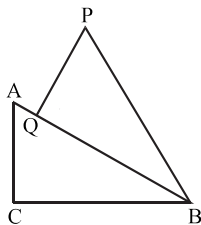
39. AD ו- BE הם גבהים במשולש ABC.
 נתון: $EF = DF$.
 א. הוכח: $\triangle AEF \cong \triangle BDF$.
 ב. הוכח: $\triangle BEC \cong \triangle ADC$.



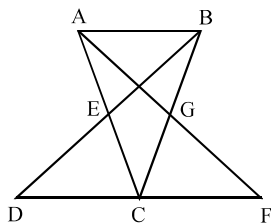
40. הקטעים BE ו- DC נחתכים
 בנקודה F. נתון: $AD = AE$,
 AF חוצה את הזווית BAC.
 א. הוכח: $AB = AC$.
 ב. הוכח: אם $BD = EF$, אז $CE = DF$.



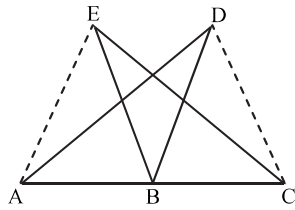
41. בשרטוט שלפניך נתון: $AC = BD$,
 $\angle A = \angle D$, $AG = DH$.
 א. הוכח: $AE = DF$.
 ב. הוכח: $\angle AFD = \angle AED$.



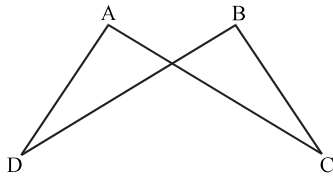
42. בציר שלפניך נתון: $PQ \perp BQ$, $AC \perp BC$,
 AB חוצה את הזווית PBC, $AC = PQ$.
 הוכח: $BC + AQ = BP$.



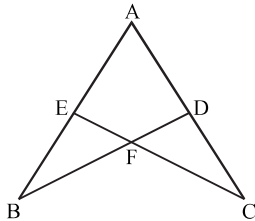
43. בציר שלפניך נתון: הקטעים AC
 ו- BD חוצים זה את זה בנקודה E,
 והקטעים AF ו- BC חוצים זה את
 זה בנקודה G. הוכח: $DC = FC$.



44. בשרטוט שלפניך נתון: $AD = CE$,
 $\angle ADB = \angle CEB$, $\angle DAC = \angle ECA$.
 א. הוכח: $\angle ABE = \angle CBD$.
 ב. הוכח: $AE = CD$.



45. בשרטוט שלפניך נתון:
 $AC = BD$, $AD = BC$.
 הוכח: $\angle A = \angle B$.
 הדרכה: חבר את הקטע DC.



46. בשרטוט שלפניך נתון:
 $DF = EF$, $AD = AE$.
 הוכח: $BE = DC$.

47. הוכח את המשפט:
במשולשים חופפים – הגבהים לצלעות המתאימות שווים זה לזה.

48. הוכח את המשפט:
במשולשים חופפים – התיכונים לצלעות המתאימות שווים זה לזה.

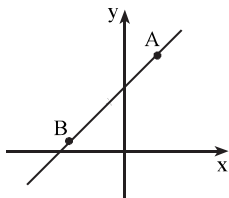
49. הוכח את המשפט:
במשולשים חופפים – חוצי הזוויות של הזוויות המתאימות שווים זה לזה.

50. הוכח: אם בשני משולשים שווים בהתאמה שתי צלעות והתיכון לאחת מהן, אז המשולשים חופפים.

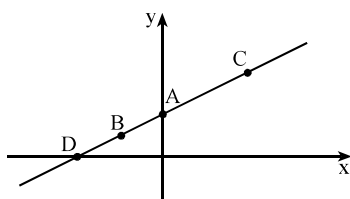
51. הוכח: אם בשני משולשים שווים בהתאמה צלע, אחת הזוויות שלידה וחוצה זוית זו, אז המשולשים חופפים.

- תשובות:** 25. ב. 33° . ג. לא. 27. ב. 76° . 28. ב. 95° . 29. ב. $a - b$.

תרגילים



1. בציור מתואר הישר $y = x + 5$ ועליו הנקודות A ו-B.
 א. בנקודה A שיעור ה-x הוא 2. מצא את שיעורי הנקודה A.
 ב. בנקודה B שיעור ה-y הוא 1. מצא את שיעורי הנקודה B.



2. הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על הישר $y = \frac{1}{2}x + 2$.
 א. בנקודה A שיעור ה-x הוא 0. ובנקודה B שיעור ה-x הוא -2. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
 ב. בנקודה C שיעור ה-y הוא 4. ובנקודה D שיעור ה-y הוא 0. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.

3. נתון הישר $y = x + 4$.
 א. הראה שהנקודות A(1;5) ו-B(-2;2) נמצאות על הישר.
 ב. הראה שהנקודות C(2;7) ו-D(0;5) אינן נמצאות על הישר.

4. נתונה משוואת הישר $y = 2x - 3$ ונתונות הנקודות A(1;-1), B(-3;4), C(2;0) ו-D(0;-3).
 אלו מהנקודות הנ"ל נמצאות על הישר? נמק.

5. נתונה משוואת הישר $y = 3x - 1$.
 רשום שיעורי נקודה כלשהי הנמצאת על הישר.

6. נתונה משוואת הישר $y = \frac{1}{2}x + 6$.
 א. קבע האם הנקודה (-2;7) נמצאת על הישר. נמק.
 ב. רשום שיעורי נקודה כלשהי הנמצאת על הישר.

- תשובות:** 1. א. (2;7). ב. (-4;1). 2. א. A(0;2), B(-2;1). ב. C(4;4), D(-4;0). 4. A ו-D. 5. למשל: (2;5). 6. לא. ב. למשל: (2;7) או (0;6) וכו'.

שרטוט הישר במערכת הצירים

כדי לשרטט גרף של ישר במערכת צירים נמצא שתי נקודות הנמצאות על הישר ונחבר ביניהן.
הערה: אפשר למצוא נקודה שלישית על הישר. נקודה זו נועדה לביקורת.

דוגמה:

שרטט את הישר $y = 2x - 1$.

פתרון:

נמצא שלוש נקודות הנמצאות על הישר:

נציב $x = 0$ ונקבל $y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$. הנקודה היא $(0; -1)$.

נציב $x = 2$ ונקבל $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. הנקודה היא $(2; 3)$.

נציב $x = -1$ ונקבל $y = 2(-1) - 1 = -3$. הנקודה היא $(-1; -3)$.

-1	2	0	x
-3	3	-1	y

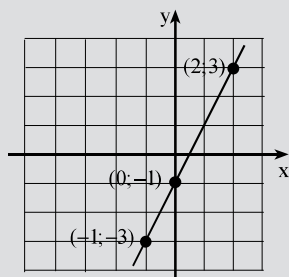
הערה: ניתן לתאר את ההצבות בעזרת

טבלת ערכים כמתואר משמאל:

בחרנו עבור x את הערכים $0, 2$ ו- -1 .

ניתן היה לבחור כל מספר אחר עבור x ולהציב אותו

במשוואה כדי לקבל את שיעור ה- y המתאים לו.



נסמן את הנקודות $(0; -1)$, $(2; 3)$ ו-

$(-1; -3)$ במערכת הצירים,

ונשרטט ישר העובר דרך נקודות אלו.

הישר המתקבל הוא הגרף המתאים

למשוואה $y = 2x - 1$.

ישרים מקבילים לצירים

נראה עכשיו כיצד לשרטט ישר המקביל לאחד הצירים.

נציג שני סוגי ישרים: ישר המקביל לציר ה- x וישר המקביל לציר ה- y .

א. ישר שמשוואתו: $y = 8$, הוא ישר המקביל לציר ה- x .

לכל הנקודות על ישר כזה יש אותו שיעור y .

למשל, ישר שמשוואתו $y = 8$ הוא ישר המקביל לציר ה- x .

ב. ישר שמשוואתו: $x = 6$, הוא ישר המקביל לציר ה- y .

לכל הנקודות על ישר כזה יש אותו שיעור x .

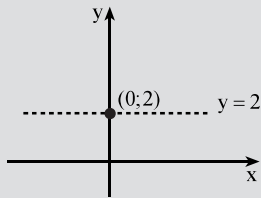
למשל, ישר שמשוואתו $x = 6$ הוא ישר המקביל לציר ה- y .

דוגמה:

שרטט את הישר שמשוואתו $y = 2$.

פתרון:

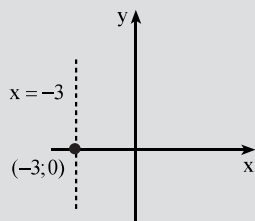
כל הנקודות במערכת הצירים ששיעור ה- y שלהן הוא 2 נמצאות על ישר זה. כדי לשרטט את הישר, נסמן על ציר ה- y נקודה שבה $y = 2$ ונעביר דרכה ישר המקביל לציר ה- x .

**דוגמה:**

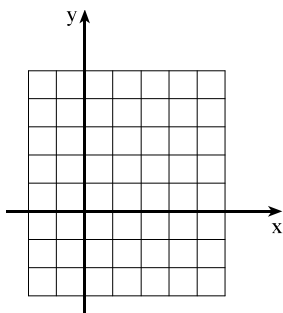
שרטט את הישר שמשוואתו $x = -3$.

פתרון:

כל הנקודות במערכת הצירים ששיעור ה- x שלהן הוא -3 נמצאות על ישר זה. כדי לשרטט את הישר, נסמן על ציר ה- x נקודה שבה $x = -3$ ונעביר דרכה ישר המקביל לציר ה- y .



2	1	0	x
			y



7.

נתון ישר שמשוואתו $y = x + 2$.

לפניך טבלת ערכים שנבחרו בה

שלושה ערכים עבור x .

א. מצא לכל ערך של x את שיעור ה- y

המתאים לו, על-ידי הצבה

במשוואה הנתונה. רשום את שיעורי

שלוש הנקודות שהתקבלו.

ב. סמן במערכת הצירים שלפניך את

הנקודות שקיבלת בסעיף א'.

ג. העבר דרך שלוש הנקודות קו ישר בעזרת

סרגל. (הדרכה: 3 הנקודות שקיבלת,

צריכות להימצא על אותו ישר, אם לא כך,

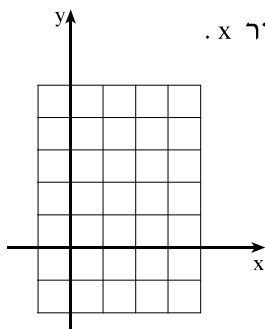
בדוק שוב את חישובי הנקודות בסעיף א').

8.

נתונה משוואת הישר $y = 2x - 3$.

לפניך טבלת ערכים שנבחרו בה שלושה ערכים עבור x .

3	2	1	x
			y



- מצא לכל ערך של x את שיעור ה- y המתאים לו, ורשום את שיעורי שלוש הנקודות שהתקבלו.
- סמן במערכת הצירים שלפניך את הנקודות שקיבלת בסעיף א'.
- העבר דרך שלוש הנקודות קו ישר בעזרת סרגל.

9.

נתונה משוואת הישר $y = -2x + 2$.

לפניך טבלת ערכים שנבחרו בה

שלושה ערכים עבור x .

2	1	0	x
			y

- מצא לכל ערך של x את שיעור ה- y המתאים לו, ורשום את שיעורי שלוש הנקודות שהתקבלו.
- שרטט מערכת צירים וסמן בה את שלוש הנקודות שקיבלת בסעיף א'.
- העבר דרך שלוש הנקודות קו ישר בעזרת סרגל.

10.

נתונה משוואת הישר $y = 3x$.

לפניך טבלת ערכים,

בה נבחרו 3 ערכים עבור x .

1	0	-1	x
			y

- מצא לכל ערך של x את שיעור ה- y המתאים לו, ורשום את שלוש הנקודות שהתקבלו.
- שרטט מערכת צירים וסמן בה את הנקודות שקיבלת בסעיף א'.
- דרך שלוש הנקודות העבר קו ישר בעזרת סרגל.

11.

שרטט את הגרפים של הישרים הבאים:

- א. $y = x + 6$ ב. $y = -x - 2$ ג. $y = 2x - 5$
- ד. $y = \frac{1}{4}x - 1$ ה. $y = 1$ ו. $x = -4$

12.

שרטט את הגרפים של שלושת הישרים הבאים במערכת צירים אחת.

- I. $y = x + 3$ II. $y = x - 4$ III. $y = x$

13. שרטט את הגרפים של שלושת הישרים הבאים במערכת צירים אחת.

I. $y = -x$ II. $y = -x - 1$ III. $y = -x + 4$

14. שרטט את הגרפים של שני הישרים הבאים במערכת צירים אחת.

I. $y = 3x - 4$ II. $y = -3x - 4$

15. שרטט את הגרפים של שני הישרים הבאים במערכת צירים.

I. $y = \frac{1}{2}x + 1$ II. $y = -\frac{1}{2}x - 1$

16. שרטט את הגרפים של הישרים הבאים, באותה מערכת צירים.

I. $y = 3$ II. $y = 0$ III. $y = -2$

17. שרטט את הגרפים של הישרים הבאים, באותה מערכת צירים.

I. $x = 2$ II. $x = 0$ III. $x = -4$

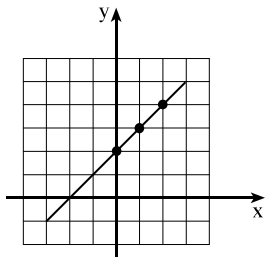
תשובות:

7. א.

2	1	0	x
4	3	2	y

(2;4), (1;3), (0;2)

ב. ג.

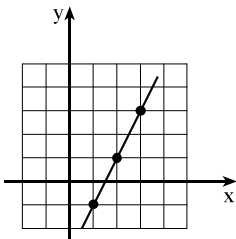


8.

א. (3;3), (2;1), (1;-1)

3	2	1	x
3	1	-1	y

ב. ג.

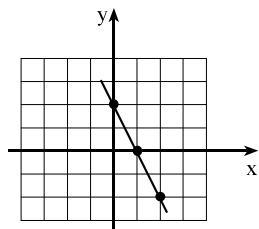


9.

א. (2;-2), (1;0), (0;2)

2	1	0	x
-2	0	2	y

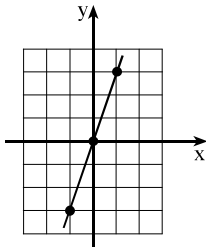
ב. ג.



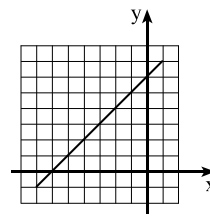
10. $(1;3)$, $(0;0)$, $(-1;-3)$. $\aleph$

1	0	-1	x
3	0	-3	y

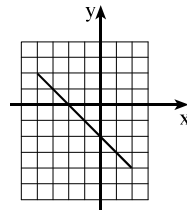
ב. ג.



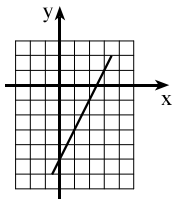
11. $\aleph$



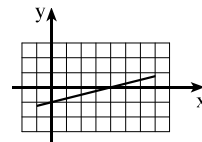
ב.



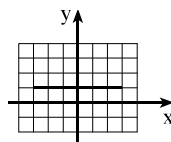
ג.



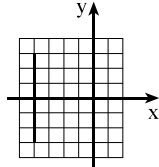
ד.



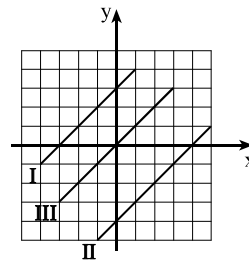
ה.



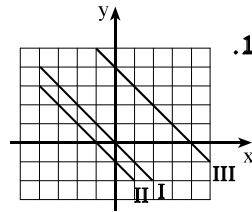
ו.



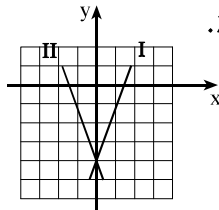
12.



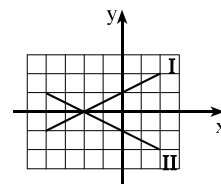
13.



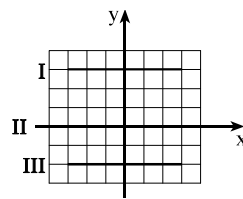
14.



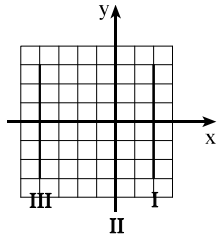
15.



16.



17.



המשוואה המפורשת של הישר

ראינו כי התיאור הגרפי של משוואה ממעלה ראשונה הוא קו ישר. כאשר ה- y מבודד בצד אחד של המשוואה, המשוואה נקראת **המשוואה המפורשת של הישר** וצורתה הכללית היא $y = mx + n$. במשוואה כזו m ו- n הם פרמטרים קבועים. הפרמטר m נקרא השיפוע של הישר והפרמטר n נקרא המספר החופשי. למשל, המשוואה $y = 3x + 8$ היא משוואה מפורשת של ישר שבה השיפוע m שווה ל-3 והמספר החופשי n שווה ל-8. כאשר רשומה משוואת ישר בצורתה המפורשת, המקדם של x הוא שיפוע הישר. למשל, במשוואת הישר $y = 3x - 5$ המקדם של x הוא 3 ולכן שיפוע הישר הוא 3. לעומת זאת, אם נרצה למצוא את השיפוע כאשר משוואת הישר אינה נתונה בצורה המפורשת, נבודד תחילה את y . למשל, כדי למצוא את שיפוע הישר $2x + y = 8$, נבודד את y ונקבל $y = -2x + 8$, כלומר שיפוע הישר הוא -2.

דוגמה:

מצא את שיפועו של הישר $2x + 3y - 6 = 0$.

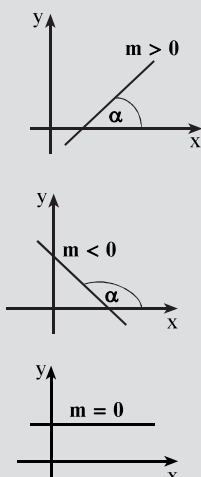
פתרון:

נבודד את y . נקבל: $3y = -2x + 6$. נחלק ב-3. נקבל: $y = -\frac{2}{3}x + 2$. קיבלנו $m = -\frac{2}{3}$ ולכן שיפוע הישר הוא $-\frac{2}{3}$.

תכונות השיפוע m

ראינו כי המשוואה המפורשת של הישר היא $y = mx + n$.

ערכו של הפרמטר m קובע את כיוון הישר:

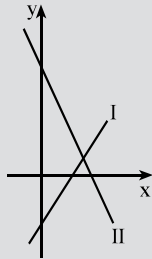


כאשר m חיובי ($m > 0$) צורת הגרף היא ישר שעולה משמאל לימין. במקרה זה הישר יוצר זווית (α) חדה עם הכיוון החיובי של ציר ה- x . ככל שהשיפוע גדול יותר, הזווית α גדולה יותר.

כאשר m שלילי ($m < 0$) צורת הגרף היא ישר שיורד משמאל לימין. במקרה זה הישר יוצר זווית (α) קהה עם הכיוון החיובי של ציר ה- x . ככל שהשיפוע קטן יותר, הזווית α קטנה יותר.

כאשר $m = 0$ הישר מקביל לציר ה- x (או מתלכד איתו).

הערה: כפי שראינו, משוואת ישר המאונך לציר ה- x היא מספר x .
ישר כזה, לא ניתן להציג בצורה $y = mx + n$ והשיפוע שלו אינו מוגדר.



דוגמה:

בציור שלפניך מתוארים שני גרפים
המסומנים על-ידי I ו-II.

איזה מהגרפים מתאר את הישר $y = 2x - 3$

ואיזה מהגרפים מתאר את הישר $y = -2x + 5$?

פתרון:

שיפוע הישר $y = 2x - 3$ הוא 2, כלומר $m > 0$.

שיפוע הישר $y = -2x + 5$ הוא -2, כלומר $m < 0$.

כאשר השיפוע חיובי הגרף עולה משמאל לימין ולכן הישר שמשוואתו
 $y = 2x - 3$ מתאים לגרף מספר I.

כאשר השיפוע שלילי הגרף יורד משמאל לימין ולכן הישר שמשוואתו
 $y = -2x + 5$ מתאים לגרף מספר II.

תכונת המספר החופשי n

ראינו כי כאשר ישר מוצג בצורה המפורשת $y = mx + n$, הפרמטר n
נקרא המספר החופשי.

כאשר נציב $x = 0$ במשוואת הישר, נקבל: $y = m \cdot 0 + n$, כלומר $y = n$
ומכאן שהישר $y = mx + n$ חותך את ציר ה- y בנקודה $(0; n)$.

למעשה, על סמך הערך של n ניתן לומר באיזו נקודה הישר חותך את
ציר ה- y . למשל: הישר $y = 2x + 5$ חותך את ציר ה- y בנקודה $(0; 5)$.

שים לב!

כאשר $n = 0$, הישר המתקבל הוא $y = mx$. ישר כזה חותך את ציר ה- y
בנקודה $(0; 0)$, כלומר עובר דרך ראשית הצירים.

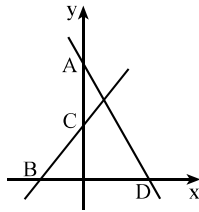
תרגילים

רשום את השיפוע של כל אחד מהישרים הבאים:

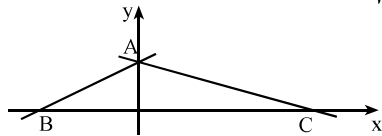
1. $y = 2x - 8$ 2. $y = -\frac{3}{5}x + 4$ 3. $y = x$

4. $y + 3x = 10$ 5. $2y = 5x + 4$ 6. $3y + 12x = 10$

7. $5y - 4x + 37 = 0$ 8. $x - 2y - 6 = 0$ 9. $y = 5$

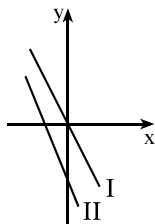


- 10.** הישרים AD ו-BC הם הגרפים של הפונקציות
 (1) $y = 2x + 6$ ו- (2) $y = -4x + 20$.
 מצא איזה מהישרים הוא גרף הפונקציה (1),
 ואיזה – הוא גרף הפונקציה (2).



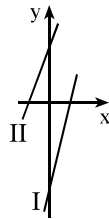
- 11.** הישרים AB ו-AC הם הגרפים של הפונקציות:
 (1) $y = \frac{1}{2}x + 8$ ו- (2) $y = -\frac{1}{4}x + 8$.
 מצא איזה מהישרים הוא גרף
 הפונקציה (1), ואיזה מהם
 הוא גרף הפונקציה (2).

לפניך שרטוטים של שני ישרים I ו-II.
 התאם לכל ישר את אחת המשוואות שמתחתיו. נמק.



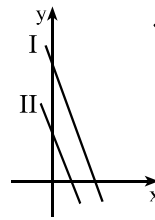
15.

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= -2x \\ (2) \quad y &= -3x - 2 \end{aligned}$$



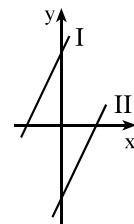
14.

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= 3x + 2 \\ (2) \quad y &= 5x - 4 \end{aligned}$$



13.

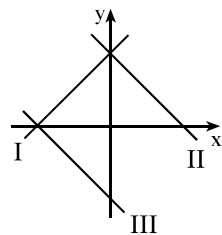
$$\begin{aligned} (1) \quad y &= -3x + 5 \\ (2) \quad y &= -3x + 2 \end{aligned}$$



12.

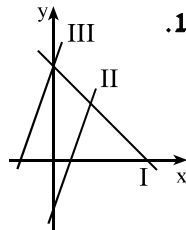
$$\begin{aligned} (1) \quad y &= 2x - 4 \\ (2) \quad y &= 2x + 4 \end{aligned}$$

התאם לכל אחד משלושת הישרים את אחת משלוש המשוואות הרשומות מטה:



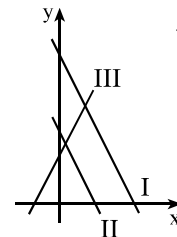
18.

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= -x + 3 \\ (2) \quad y &= x + 3 \\ (3) \quad y &= -x - 3 \end{aligned}$$



17.

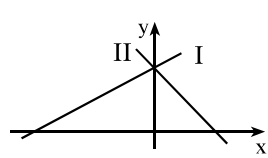
$$\begin{aligned} (1) \quad y &= -x + 4 \\ (2) \quad y &= 3x + 4 \\ (3) \quad y &= 3x - 2 \end{aligned}$$



16.

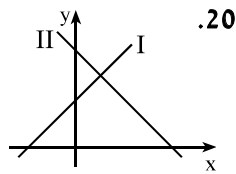
$$\begin{aligned} (1) \quad y &= 2x + 2 \\ (2) \quad y &= -2x + 6 \\ (3) \quad y &= -2x + 3 \end{aligned}$$

התאם לכל אחד משני הישרים את המשוואה המתאימה מבין שלוש המשוואות הרשומות מטה :



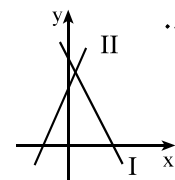
21.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + 6 & (1) \\ y &= -\frac{1}{2}x + 4 & (2) \\ y &= -x + 6 & (3) \end{aligned}$$



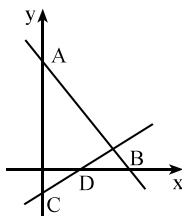
20.

$$\begin{aligned} y &= -x + 6 & (1) \\ y &= -x + 2 & (2) \\ y &= x + 3 & (3) \end{aligned}$$



19.

$$\begin{aligned} y &= 3x + 2 & (1) \\ y &= -2x + 3 & (2) \\ y &= 3x + 3 & (3) \end{aligned}$$



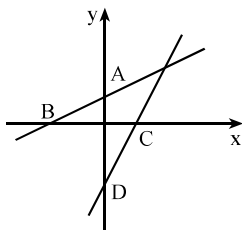
22. הישרים AB ו-CD הם הגרפים של הפונקציות

$$(1) \quad 3x - 4y = 12 \quad \text{ו-} \quad (2) \quad 2y + 3x = 24$$

מצא איזה מהישרים הנ"ל

הוא גרף הפונקציה (1),

ואיזה - גרף הפונקציה (2).



23. הישרים AB ו-CD הם הגרפים

$$\text{של הפונקציות: } (1) \quad x - 2y + 4 = 0$$

$$(2) \quad 5x - 2y - 8 = 0$$

מצא איזה משני הישרים הנ"ל

הוא גרף הפונקציה (1) ואיזה

הוא גרף הפונקציה (2).

תשובות: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23.

1. מתאים ל-(1), 2. מתאים ל-(2), 3. מתאים ל-(1), 4. מתאים ל-(2), 5. מתאים ל-(1), 6. מתאים ל-(2), 7. מתאים ל-(1), 8. מתאים ל-(2), 9. מתאים ל-(1), 10. מתאים ל-(2), 11. מתאים ל-(1), 12. מתאים ל-(2), 13. מתאים ל-(1), 14. מתאים ל-(2), 15. מתאים ל-(1), 16. מתאים ל-(2), 17. מתאים ל-(1), 18. מתאים ל-(2), 19. מתאים ל-(1), 20. מתאים ל-(2), 21. מתאים ל-(1), 22. מתאים ל-(2), 23. מתאים ל-(1).