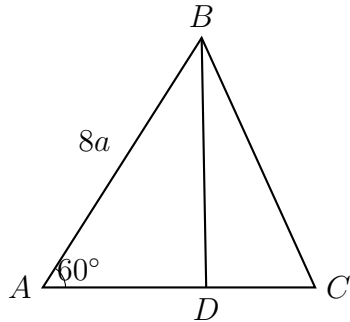


**דף עבודה - טריגונומטריה (שאלון 571)**

משפט הסינוסים, הקוסינוסים, פרמטרים וזהויות

**שאלה 1 (רמת היכרות ושליטה בסיסית)**  
 במשולש  $ABC$  נתון:  $AB = 8a$ ,  $AC = 5a$ ,  $\angle A = 60^\circ$ . הנקודה  $D$  מונחת על הצלע  $AC$  כך ש-  $AD = 3a$ .

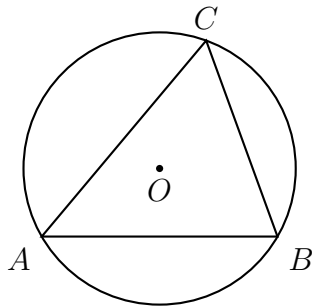


1. הבע את אורכי הקטעים  $BC$  ו-  $BD$  באמצעות  $a$ . מהו סוג המשולש  $\triangle BDC$ ?

2. חשב את זוויות המשולש  $\triangle BDC$ .

3. נתון כי שטח המשולש  $\triangle ABD$  הוא  $24\sqrt{3}$ . מצא את הערך של הפרמטר  $a$ .

**שאלה 2 (שימוש בזהויות)**  
 משולש  $ABC$  חסום במעגל שרדיוסו  $R$ . נתונות זוויות המשולש:  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = 2\alpha$ .

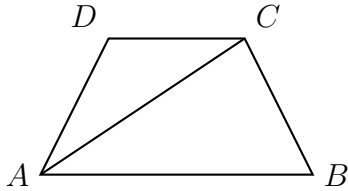


1. הבע את צלעות המשולש  $BC$  ו-  $AC$  באמצעות  $R$  ו-  $\alpha$ .

2. נתון כי  $AC = 1.5 \cdot BC$ . מצא את גודל הזווית  $\alpha$ . (היעזר בזהות לזווית כפולה).

3. נתון כי רדיוס המעגל הוא  $R = 10$ . חשב את שטח המשולש  $\triangle ABC$  (עבור ה-  $\alpha$  שמצאת בסעיף הקודם).

**שאלה 3 (רמה גבוהה - שילוב גאומטריה ופרמטרים)**  
 נתון טרפז שווה שוקיים  $ABCD$  ( $AB > CD$ ,  $AB \parallel CD$ ). שוק הטרפז היא  $AD = BC = x$ . אלכסון הטרפז  $AC$  חוצה את הזווית  $\angle DAB$ . נסמן את הזווית:  $\angle DAB = 2\alpha$ .

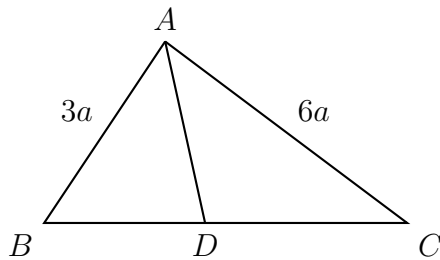


1. הבע את אורכי בסיסי הטרפז  $AB$  ו-  $CD$  באמצעות  $x$  ו-  $\alpha$ .

2. נתון כי שטח הטרפז הוא  $S$ . הבע את שוק הטרפז  $x$  באמצעות  $S$  ו-  $\alpha$ .

3. נתון כי  $\alpha = 30^\circ$  ושטח הטרפז הוא  $S = 12\sqrt{3}$ . חשב את אורך אלכסון הטרפז  $AC$ .

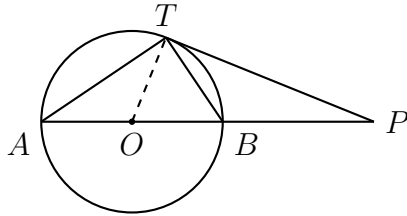
**שאלה 4 (רמה גבוהה - בניית משוואות טריגונומטריות)**  
 במשולש  $ABC$ , הקטע  $AD$  חוצה את הזווית  $\angle BAC$ . נתון:  $AC = 6a$ ,  $AB = 3a$ ,  $\angle BAC = 2\alpha$ .



1. הבע את אורך חוצה הזווית  $AD$  באמצעות  $a$  ו-  $\alpha$ .

2. נתון בנוסף כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $\triangle ABC$  הוא  $R = 3a$ . הבע את צלע המשולש  $BC$  באמצעות  $a$  ו-  $\alpha$ , והיעזר בנתון כדי למצוא את גודל הזווית  $\alpha$ .

**שאלה 5 (רמת אתגר - גאומטריה של מעגל ויחסי שטחים)**  
 מנקודה  $P$  הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו  $O$  ורדיוסו  $R$ , העבירו משיק  $PT$  למעגל ( $T$  נקודת ההשקה). כמו כן, העבירו ישר דרך  $P$  החותך את המעגל בנקודות  $B$  ו- $A$  ועובר דרך מרכז המעגל  $O$  (כך ש- $B$  קרובה יותר ל- $P$ ). נסמן:  $\angle TPO = \alpha$ .



1. הבע את אורכי הקטעים  $PT$ ,  $PA$  ו- $PB$  באמצעות  $R$  ו- $\alpha$ .

2. הוכח כי היחס בין שטח המשולש  $\triangle PTA$  לשטח המשולש  $\triangle PTB$  תלוי אך ורק ב- $\alpha$ , והבע יחס זה.

3. נתון כי יחס השטחים שמצאת בסעיף ב' שווה ל-3. מצא את הזווית  $\alpha$ .

4. עבור ה- $\alpha$  שמצאת בסעיף ג', מעבירים מיתר  $TC$  במעגל המקביל לישר  $PA$ . מאיזה סוג המרובע  $PTCB$ ? הבע את שטחו באמצעות  $R$ .

**תשובות סופיות**

**שאלה 1:** 1.  $BD = 7a, BC = 7a$ . המשולש  $\triangle BDC$  הוא שווה שוקיים. 2.  $\angle C = \angle BDC =$ . 3.  $\angle DBC = 16.42^\circ, 81.79^\circ$ . 4.  $a = 2$ .

**שאלה 2:** 1.  $AC = 2R \sin(2\alpha), BC = 2R \sin \alpha$ . 2.  $\alpha = 41.41^\circ$ . 3.  $S_{\triangle ABC} \approx 52.89$ .

**שאלה 3:** 1.  $AB = x(1 + 2 \cos(2\alpha)), CD = x$ . 2.  $x = \sqrt{\frac{S}{4 \sin \alpha \cos^3 \alpha}}$ . 3.  $AC = 4\sqrt{3}$ .

**שאלה 4:** 1.  $AD = 4a \cos \alpha$ . 2.  $\alpha = 30^\circ, BC = 3a\sqrt{5 - 4 \cos(2\alpha)}$ .

**שאלה 5:** 1.  $PT = \frac{R}{\tan \alpha}, PA = R \left( \frac{1 + \sin \alpha}{\sin \alpha} \right), PB = R \left( \frac{1 - \sin \alpha}{\sin \alpha} \right)$ . 2. היחס הוא  $\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$ . 3.  $\alpha = 30^\circ$ . 4. מקבילית,  $S_{PTCB} = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2$ .

## רמזים והדרכות

### רמז לשאלה 1:

□ בסעיף א', הפעל את משפט הקוסינוסים פעמיים: פעם אחת במשולש הגדול  $\triangle ABC$  כדי למצוא את  $BC$ , ופעם שנייה במשולש  $\triangle ABD$  כדי למצוא את  $BD$ .

□ בסעיף ג', השתמש בנוסחת השטח עם סינוס:  $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin(\angle A)$ .

### רמז לשאלה 2:

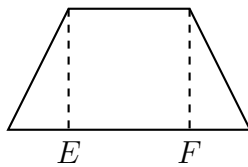
□ משפט הסינוסים במשולש חסום במעגל קובע כי היחס בין כל צלע לסינוס הזווית שמולה שווה ל- $2R$ .

□ בסעיף ב', כאשר תציב את המשוואה, תקבל ביטוי עם  $\sin(2\alpha)$ . פתח אותו בעזרת הזהות  $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  (שכן  $\alpha > 0$ ).

### רמז לשאלה 3:

□ הוכח תחילה כי המשולש  $\triangle ADC$  הוא שווה שוקיים (היעזר בזוויות מתחלפות בין מקבילים:  $\angle CAB = \angle ACD$ ).

□ כדי להביע את שטח הטרפז, הורד גבהים מהקדקודים  $C$  ו- $D$  לבסיס  $AB$ , כמראה בשרטוט:



□ ביטוי השטח ידרוש פישוט טריגונומטרי. היעזר בזהות:  $1 + \cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha$ .

### רמז לשאלה 4:

□ בסעיף א', דרך המלך להבעת חוצה זווית היא באמצעות פירוק שטחים: שטח המשולש הגדול  $ABC$  שווה לסכום שטחי המשולשים  $\triangle ABD$  ו- $\triangle ADC$ .

□ בסעיף ב', בנה משוואה: מצד אחד הבע את  $BC$  בעזרת משפט הקוסינוסים ב- $\triangle ABC$ , ומצד שני הבע את  $BC$  בעזרת משפט הסינוסים ( $BC = 2R \sin(2\alpha)$ ). השווה ביניהם ופתור משוואה טריגונומטרית.

### רמז לשאלה 5:

□ ישר המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה ( $\angle PTO = 90^\circ$ ). הפעל פונקציות טריגונומטריות בסיסיות במשולש ישר הזווית  $\triangle PTO$ .

□ נקודות  $A, O, B$  נמצאות על קו ישר (הקוטר). לכן  $PA = PO + R$  ו-  $PB = PO - R$ .

□ מצא את השטחים של המשולשים  $\triangle PTA$  ו-  $\triangle PTB$  על ידי נוסחת השטח עם שתי צלעות וסינוס הזווית שביניהן ( $\angle TPA = \alpha$ ).

## פתרונות מלאים

## פתרון שאלה 1:

1. מציאת  $BC$ : נפעיל את משפט הקוסינוסים במשולש  $\triangle ABC$ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$$

$$BC^2 = (8a)^2 + (5a)^2 - 2(8a)(5a) \cos 60^\circ = 64a^2 + 25a^2 - 80a^2 \cdot 0.5 = 49a^2$$

מכאן נוציא שורש ונקבל  $BC = 7a$ .

מציאת  $BD$ : נפעיל את משפט הקוסינוסים במשולש  $\triangle ABD$ :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ$$

$$BD^2 = (8a)^2 + (3a)^2 - 2(8a)(3a) \cdot 0.5 = 64a^2 + 9a^2 - 24a^2 = 49a^2$$

מכאן  $BD = 7a$ . מכיון ש- $BC = BD = 7a$ , המשולש  $\triangle BDC$  הוא שווה שוקיים.

2. זווית  $\triangle BDC$ : נמצא תחילה את זווית  $\angle C$  ממשפט הקוסינוסים במשולש הגדול  $\triangle ABC$ :

$$\cos \angle C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{25a^2 + 49a^2 - 64a^2}{2(5a)(7a)} = \frac{10a^2}{70a^2} = \frac{1}{7}$$

$$\angle C \approx 81.79^\circ$$

במשולש  $\triangle BDC$ , מאחר ש- $BD = BC$ , זווית הבסיס  $\angle BDC = \angle C = 81.79^\circ$ . זווית הראש תהיה:  $\angle DBC = 180^\circ - 2(81.79^\circ) = 16.42^\circ$ .

3. שטח ומציאת  $a$ : שטח המשולש  $\triangle ABD$  נתון ע"י:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}(8a)(3a) \frac{\sqrt{3}}{2} = 6a^2\sqrt{3}$$

נשווה לנתון:

$$6a^2\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \implies a^2 = 4 \implies a = 2$$

## פתרון שאלה 2:

1. לפי משפט הסינוסים:  $\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R \implies BC = 2R \sin \alpha$ . בדומה,  $\frac{AC}{\sin \angle B} = 2R \implies AC = 2R \sin(2\alpha)$ .

2. נציב בנתון  $AC = 1.5BC$ :

$$2R \sin(2\alpha) = 1.5(2R \sin \alpha)$$

נחלק ב- $2R$  ונפרק בעזרת הזהות:

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = 1.5 \sin \alpha$$

כיון ש- $\alpha$  זווית במשולש,  $\sin \alpha \neq 0$ , לכן נחלק ונקבל:

$$2 \cos \alpha = 1.5 \implies \cos \alpha = 0.75 \implies \alpha = 41.41^\circ$$

3. נחשב את צלעות המשולש והזווית השלישית:  $\alpha = 41.41^\circ$ ,  $2\alpha = 82.82^\circ$ ,  $\angle C = 180^\circ - 3\alpha = 55.77^\circ$ .  
 $AC = 20 \sin(82.82^\circ) = 19.84$ ,  $BC = 20 \sin(41.41^\circ) = 13.23$ .  
 שטח המשולש:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \angle C = \frac{1}{2} (19.84)(13.23) \sin(55.77^\circ) \approx 52.89$$

### פתרון שאלה 3:

1. הזווית  $\angle CAB = \alpha$  (אלכסון חוצה זווית). מזוויות מתחלפות  $\angle ACD = \alpha$ . לכן  $\triangle ADC$  שווה שוקיים ו- $DC = AD = x$ . נוריד גבהים  $DE, CF$  ל- $AB$ . במשולש ישר הזווית  $\triangle ADE$ :  $AE = AD \cos(2\alpha) = x \cos(2\alpha)$ . מאחר שהטרפז שווה שוקיים,  $FB = AE = x \cos(2\alpha)$ . החלק המרכזי  $EF = DC = x$ . סה"כ הבסיס הגדול:  $AB = AE + EF + FB = x + 2x \cos(2\alpha)$ .

2. גובה הטרפז הוא  $h = DE = x \sin(2\alpha)$ . השטח:

$$S = \frac{(AB + CD)}{2} \cdot h = \frac{x + 2x \cos(2\alpha) + x}{2} \cdot x \sin(2\alpha)$$

$$S = x^2(1 + \cos(2\alpha)) \sin(2\alpha)$$

נשתמש בזהות  $1 + \cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha$  וכן  $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$$S = x^2(2 \cos^2 \alpha)(2 \sin \alpha \cos \alpha) = 4x^2 \sin \alpha \cos^3 \alpha$$

נחלץ את  $x$ :

$$x = \sqrt{\frac{S}{4 \sin \alpha \cos^3 \alpha}}$$

3. נציב  $\alpha = 30^\circ$ ,  $S = 12\sqrt{3}$ :

$$x^2 = \frac{12\sqrt{3}}{4 \sin 30^\circ \cos^3 30^\circ} = \frac{12\sqrt{3}}{4 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} = \frac{12\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}} = \frac{12\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}} = 16$$

ולכן  $x = 4$ . למציאת אלכסון  $AC$ , נפעיל משפט קוסינוסים ב- $\triangle ADC$  (בו זווית  $\angle D = 180^\circ - 2\alpha = 120^\circ$ ):

$$AC^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos 120^\circ = 16 + 16 - 32(-0.5) = 48 \implies AC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

### פתרון שאלה 4:

1. סכום שטחי המשולשים:  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC}$ .

$$\frac{1}{2}(3a)(6a) \sin(2\alpha) = \frac{1}{2}(3a)AD \sin \alpha + \frac{1}{2}(6a)AD \sin \alpha$$

$$9a^2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = 4.5a \cdot AD \cdot \sin \alpha$$

נחלק ב- $a \sin \alpha$  (שונה מאפס):

$$18a \cos \alpha = 4.5 \cdot AD \implies AD = 4a \cos \alpha$$

2. ממשפט הקוסינוסים ב- $\triangle ABC$ :

$$BC^2 = 9a^2 + 36a^2 - 2(3a)(6a)\cos(2\alpha) = 9a^2(5 - 4\cos(2\alpha))$$

$$BC = 3a\sqrt{5 - 4\cos(2\alpha)}$$

ממשפט הסינוסים:  $BC = 2R\sin(2\alpha) = 6a\sin(2\alpha)$ . נשווה ונעלה בריבוע:

$$36a^2\sin^2(2\alpha) = 9a^2(5 - 4\cos(2\alpha))$$

נחלק ב- $9a^2$  ונציב  $\sin^2(2\alpha) = 1 - \cos^2(2\alpha)$ :

$$4(1 - \cos^2(2\alpha)) = 5 - 4\cos(2\alpha)$$

$$4\cos^2(2\alpha) - 4\cos(2\alpha) + 1 = 0 \implies (2\cos(2\alpha) - 1)^2 = 0 \implies \cos(2\alpha) = 0.5$$

$$2\alpha = 60^\circ \implies \alpha = 30^\circ \text{ ומכאן}$$

### פתרון שאלה 5:

1.  $PT$  משיק ולכן  $\triangle PTO$  ישר זווית.  $PT = \frac{OT}{\tan \alpha} = \frac{R}{\tan \alpha}$ . היתר הוא  $PO = \frac{R}{\sin \alpha}$ . הנקודות  $A, O, B$  על הישר.  $PA = PO + R = \frac{R}{\sin \alpha} + R$ .  $PB = PO - R = \frac{R}{\sin \alpha} - R$ .  $R \left( \frac{1+\sin \alpha}{\sin \alpha} \right)$

2. השטחים הם:

$$S_{\triangle PTA} = \frac{1}{2} \cdot PA \cdot PT \cdot \sin \alpha, \quad S_{\triangle PTB} = \frac{1}{2} \cdot PB \cdot PT \cdot \sin \alpha$$

יחס השטחים הוא יחס הבסיסים:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{PA}{PB} = \frac{\frac{1+\sin \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{1-\sin \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}$$

3. נציב את הנתון:

$$\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} = 3 \implies 1+\sin \alpha = 3-3\sin \alpha \implies 4\sin \alpha = 2 \implies \sin \alpha = 0.5$$

$$\alpha = 30^\circ \text{ מכאן}$$

4. כאשר  $\alpha = 30^\circ$ :  $PB = R \left( \frac{0.5}{0.5} \right) = R$ . כמו כן, הזווית במרכז המעגל  $\angle POT = 60^\circ$ . בניית המיתר  $TC$  המקביל ל- $PB$  אומרת ש- $TC$  מקביל לקוטר  $AB$ . אם  $TC \parallel AB$  ו- $T$  בפוזיציה של זווית מרכזית  $60^\circ$ , המיתר  $TC$  תוחם משולש שווה צלעות  $\triangle TOC$  עם המרכז, ולכן אורכו  $TC = R$ . המרובע  $PTCB$  הוא בעל שתי צלעות נגדיות מקבילות ( $TC \parallel PB$ ) שוות באורכן ( $TC = PB = R$ ). לפיכך, המרובע הוא מקבילית. שטח המקבילית הוא בסיס כפול גובה: הבסיס  $PB = R$ . הגובה הוא גובה הנקודה  $T$  מעל  $AB$ :

$$h = R \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$S = R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2 \text{ השטח:}$$